

Sommaire

IIX- Exercices III

8-1/ Exercice 3-1

8-2/ Exercice 3-2

8-3/ Exercice 3-3

8-4/ Exercice 3-4

8-5/ Exercice 3-5

8-6/ Exercice 3-6

IIX- Exercices III

8-1/ Exercice 3-1

Dans chacun des cas suivants, montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer, puis déterminer une expression de $f^{-1}(x)$:

$$1 \quad f(x) = x^2 - 6x + 5 ; \quad I =] - \infty; 3[$$

$$2 \quad f(x) = \frac{x^2+4x}{x+2} ; \quad I = [2; +\infty[$$

$$3 \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} ; \quad I = \mathbb{R}^+$$

$$4 \quad f(x) = (\sqrt{3-x} + 1)^2 ; \quad I =] - \infty; 3]$$

$$5 \quad f(x) = x - \sqrt{x^2 - x} ; \quad I = [1; +\infty[$$

$$6 \quad f(x) = 2x - \sqrt{x} ; \quad I = [0; \frac{1}{16}]$$

8-2/ Exercice 3-2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1 \quad x^4 - 5x^2 - 24 = 0$$

$$2 \quad x^6 + 3x^3 - 4 = 0$$

$$3 \quad \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 5x + 8} - \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 5x + 1} = 1$$

$$4 \quad \sqrt[4]{\frac{2-x}{3+x}} + \sqrt[4]{\frac{3+x}{2-x}} = 2$$

$$5 \quad (\sqrt[3]{x} - 1)^3 - 27 = 0$$

$$6 \quad \sqrt[3]{x+8} - \sqrt[3]{8-x} = \sqrt[6]{64-x^2}$$

8-3/ Exercice 3-3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$1 \quad \sqrt{x+2} < x$$

$$2 \quad \sqrt{2x+1} - 3 < \sqrt{x+2}$$

$$3 \quad (2-x)^3 \leq x$$

$$4 \quad \sqrt[3]{x^2+8} - 2 < x$$

8-4/ Exercice 3-4

Calculer les limites suivantes :

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2-x}}{x}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}+1}$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-\sqrt[3]{x+6}}{3-\sqrt{2x+5}}$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt[4]{x}-1}$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+x} - x$$

$$7 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}$$

8-5/ Exercice 3-5

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \text{Arc tan } 2 + \text{Arc tan } \frac{1}{2}$$

$$B = \text{Arc tan } (1 - \sqrt{2}) - \text{Arc tan } (1 + \sqrt{2})$$

2. Établir les égalités suivantes :

$$\text{Arc tan } \frac{1}{2} + \text{Arc tan } \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arc tan } \frac{1}{2} + \text{Arc tan } \frac{1}{5} + \text{Arc tan } \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$4 \text{Arc tan } \frac{1}{5} - \text{Arc tan } \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

On pose : $\alpha = 2 \text{Arc tan } \frac{1}{2} - \text{Arc tan } \frac{1}{7}$

3. Vérifier que $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$.

4. Calculer $\tan \alpha$ puis en déduire la valeur de α .

8-6/ Exercice 3-6

On considère la fonction h définie par $h(x) = \operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{x^2-4x+2}{x^2-2}\right)$

1. Déterminer D_h le domaine de définition de h .
2. Calculer les limites de h aux bornes du D_h .
3. Montrer que h réalise une bijection de $K =]\sqrt{2}; +\infty[$ à valeurs dans un intervalle L à déterminer.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]\sqrt{2} - 1; +\infty[$ par $f(x) = h(x + 1)$.

4. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer puis déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.