

Sommaire**VI- Fonction réciproque d'une monotone continue et strictement monotone**

6-1/ Théorème de la fonction réciproque

6-2/ Propriétés de la fonction réciproque

VII- Fonctions réciproques usuelles

7-1/ Fonction arctangente

7-2/ Fonction racine $n^{ième}$

7-3/ Puissance rationnelle d'un nombre strictement positif

VI- Fonction réciproque d'une monotone continue et strictement monotone

6-1/ Théorème de la fonction réciproque

Proposition 11

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors elle réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.

Preuve**Applications**

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer puis déterminer une expression de $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$:

- 1 $f(x) = x^2 - 2x + 5$; $I = [1; +\infty[$
- 2 $f(x) = 4x - x^2$; $I =]-\infty; 2[$
- 3 $f(x) = \sqrt{x^2 - x} - x$; $I =]-\infty; 0]$
- 4 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$; $I = [0; \sqrt{2}]$

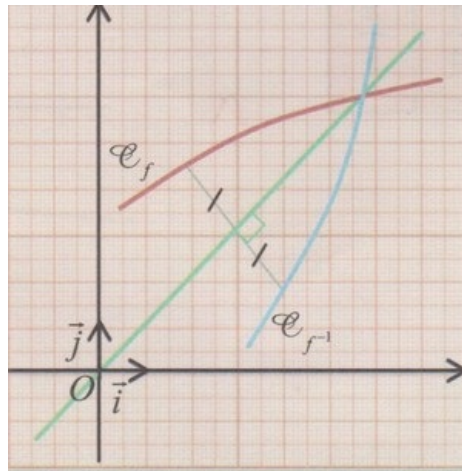
6-2/ Propriétés de la fonction réciproque

Proposition 12

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors :

- La fonction réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a le même sens de variation que la fonction f .
- Les courbes représentatives de f et de f^{-1} , dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice (c'est-à-dire par rapport à la droite d'équation $y = x$).

Preuve



VII- Fonctions réciproques usuelles

7-1/ Fonction arctangente

Définition 6

La fonction $x \mapsto \tan x$ est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

Sa fonction réciproque est appelée fonction Arctangente, et la note Arctan

Proposition 13

La fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. On a de plus :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[) (\text{Arc tan } x = y \Leftrightarrow x = \tan y)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} : \tan(\text{Arc tan } x) = x$

Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[: \text{Arc tan}(\tan x) = x$

La fonction Arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} (\text{Arc tan } x_1 = \text{Arc tan } x_2 &\Leftrightarrow x_1 = x_2) \text{ et} \\ (\text{Arc tan } x_1 < \text{Arc tan } x_2 &\Leftrightarrow x_1 < x_2) \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \text{Arc tan } x$ est impaire :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \text{Arc tan } (-x) = -\text{Arc tan } (x)$$

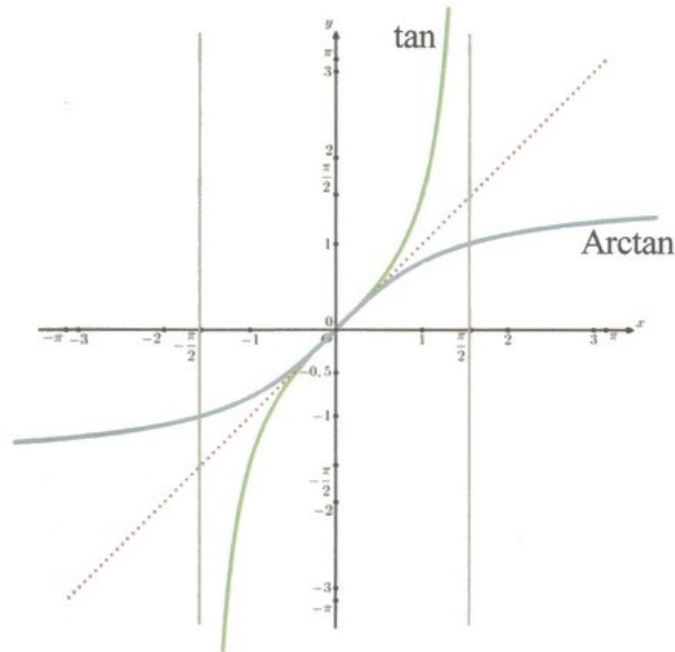
On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arc tan } x = \frac{\pi}{2} ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arc tan } x = -\frac{\pi}{2} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan } x}{x} = 1$$

Tableau de quelques valeurs importantes

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
Arctan x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

La courbe représentative de la fonction Arctan



7-2/ Fonction racine $n^{\text{ième}}$

Définition 7

Soit n un entier naturel non nul.

La fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. Sa fonction réciproque est appelée la fonction racine $n^{\text{ième}}$, et on la note $\sqrt[n]{}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt[n]{x}$ se lit «racine $n^{\text{ième}}$ de x ».

Proposition 14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a alors pour tous x et y de $\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x ; \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y ; \quad \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$$

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x$

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et de plus : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

Remarque

Soit a un réel non nul et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $x^n = a$ dépend de signe du nombre a et de la parité de l'entier n .

Le tableau suivant résume les cas possibles :

Parité de n Signe de a	n pair	n impair
$a > 0$	$S = \{-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}\}$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$
$a < 0$	$S = \emptyset$	$S = \{-\sqrt[n]{-a}\}$

Proposition 15

Soit a et b deux réels, et p et n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
On a alors les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab} \\ \sqrt[n]{\frac{1}{a}} &= \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \quad (a \neq 0) \\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0) \\ \sqrt[n]{a^p} &= \sqrt[n]{a}^p \\ \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} &= \sqrt[np]{a} \\ (\sqrt[n]{a})^p &= \sqrt[n]{a^p}\end{aligned}$$

Proposition 16

Soit u une fonction positive sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

Si u est continue sur I alors la fonction $\sqrt[n]{u}$ est continue sur I .

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 1$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = 1$

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$

7-3/ Puissance rationnelle d'un nombre strictement positif

Définition 8

Soit a un réel strictement positif et r un nombre rationnel.

On pose $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre a^r est le nombre $\sqrt[q]{a^p}$. Ce nombre est appelé la puissance rationnelle du nombre a d'exposant r .

Remarque

Soit a un réel strictement positif et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

On a : $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$.

De façon générale, on a l'égalité : $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Proposition 17

Soit r et r' deux nombres rationnels, et a et b deux réels strictement positifs.

Alors on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 a^r \times a^{r'} &= a^{r+r'} \ ; \ (ab)^r = a^r \times b^r \\
 (a^r)^{r'} &= a^{r.r'} \ ; \ a^{-r} = \frac{1}{a^r} \\
 \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r} \ ; \ \frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}
 \end{aligned}$$