

Sommaire

V- Exercices II

5-1/ Exercice 2-1

5-2/ Exercice 2-2

5-3/ Exercice 2-3

5-4/ Exercice 2-4

5-5/ Exercice 2-5

5-6/ Exercice 2-6

5-7/ Exercice 2-7

5-8/ Exercice 2-8

V- Exercices II

5-1/ Exercice 2-1

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f au point x_0 :

$$1 \quad \begin{cases} f(x) = \frac{x^3-8}{\sqrt{x^2+5}-3} & (x \neq 2) \\ f(2) = 18 \end{cases} ; x_0 = 2$$
$$2 \quad \begin{cases} f(x) = (x^2 - 9) \sin\left(\frac{1}{x-3}\right) & (x \neq 3) \\ f(3) = 0 \end{cases} ; x_0 = 3$$
$$3 \quad \begin{cases} f(x) = \frac{(1-\tan x)^2}{1+\cos 4x} & (x \neq \frac{\pi}{4}) \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases} ; x_0 = \frac{\pi}{4}$$

5-2/ Exercice 2-2

On considère la fonction numérique g définie par :

$$\left(\begin{array}{l} g(x) = (2x + \pi) \tan x \text{ si } x \in] - \pi; -\frac{\pi}{2} [\\ g(x) = \frac{1 - \cos^3 x}{x \tan x \cos^2 x} \text{ si } x \in] -\frac{\pi}{2}; 0 [\\ g(x) = \frac{3\sqrt{1+x^4} - x}{2+x} \text{ si } x \in [0; +\infty [\end{array} \right)$$

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} g(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} g(x)$$

2. Établir la continuité de la fonction g en 0.

5-3/ Exercice 2-3

Pour chacun des cas suivants, montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité en x_0 puis donner ce prolongement :

$$\begin{array}{l} 1 \quad f(x) = \frac{2x^{17} - 17x + 15}{x-1} ; \quad x_0 = 1 \\ 2 \quad f(x) = \frac{x^n - a^n}{x-a} ; \quad x_0 = a \quad (a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}) \\ 3 \quad f(x) = \frac{\sin(\pi\sqrt{\cos x})}{x} ; \quad x_0 = 0 \\ 4 \quad f(x) = \frac{x^{p+1} - (p+1)x + p}{(x-1)^2} ; \quad x_0 = 1 \quad (p \in \mathbb{N}^*) \\ 5 \quad f(x) = \frac{\tan x - 1}{\sqrt{2} \cos x - 1} ; \quad x_0 = \frac{\pi}{4} \end{array}$$

5-4/ Exercice 2-4

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\left(\begin{array}{l} f(x) = \frac{x^3 + 6}{2x - 3} \text{ si } x \leq -1 \\ f(x) = \cos(\pi x) \text{ si } -1 < x < 1 \\ f(x) = -\frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 3} \text{ si } x \geq 1 \end{array} \right)$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

5-5/ Exercice 2-5

- Montrer que l'équation $x^5 + x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ admet une unique solution dans $] -\infty; \frac{1}{2}]$.
- Montrer que la courbe de la fonction f , telle que $f(x) = 2x^3 + 3x + 4$ coupe l'axe des abscisses en un seul point dont l'abscisse α est tel que $-1 < \alpha < 0$.

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^3 - 6x^2 + 11$

- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet trois solutions distinctes dans \mathbb{R} , notées x_1, x_2 et x_3 . (On adoptera l'ordre suivant $x_1 < x_2 < x_3$).
- En déduire le signe de $g(x)$ sur \mathbb{R} .

5-6/ Exercice 2-6

On considère la fonction f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \text{ si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[) \sin x \leq x \leq \tan x$
2. En déduire que pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$: $0 < f(x) < \frac{1 - \cos x}{\sin x}$
3. Étudier la continuité de f à droite de 0.

5-7/ Exercice 2-7

Soit f une fonction définie de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ et continue sur $[0; 1]$.

1. Établir que $(\exists c \in [0; 1]) f(c) + f(1 - c) = 2c$

5-8/ Exercice 2-8

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$$

1. Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{2n}{n+1}\right]$.
2. En déduire que $f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$.
3. Montrer qu'il existe au moins un réel $\alpha \in \left]\frac{2n}{n+1}; 2\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
4. Vérifier que $\alpha^n = \frac{1}{2 - \alpha}$.