Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 1-2-1 : Limites et continuité - Partie 2 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

III- Continuité d'une fonction numérique

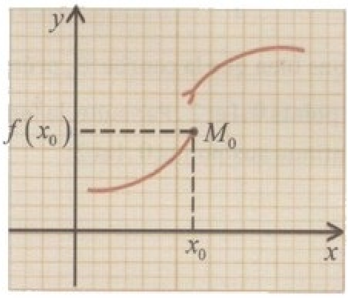
3-1/ Continuité d'une fonction en un point

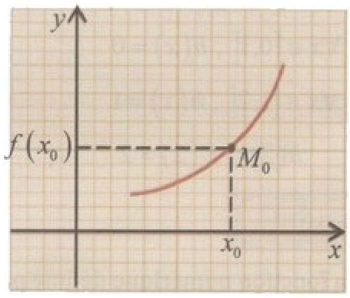
Définition 2

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert centré en un point x_0.

On dit que la fonction f est continue au point x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Interprétation Graphique





Remarque

si f est définie au point x_0 et n'admet pas de limite en x_0 ou sa limite est infinie en x_0, on dit que f est discontinue au point x_0.

f est continue en x_0 si :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha > 0)\ \left(\forall x \in D_f\right)\ (0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Applications

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-2x^2-x+1}{x+1} & (x \neq -1) \\ f(-1) = 1 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de la fonction f au point $x_0 = -1$.

Soit g la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x+\tan(2x)}{\sin(3x)} & (x \neq 0) \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

2. La fonction g est-elle continue au point $x_0 = 0$? Justifier la réponse.

3-2/ Continuité à droite - Continuité à gauche

Définition 3

1- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[x_0, x_0 + \alpha[$ où $\alpha \in \mathbb{R}^+$*.

On dit que f est continue à droite en x_0 si $\lim\limits_{x \to {x_0}^+} f(x) = f(x_0)$.

2- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme]x0 - or,x0] où or e R * .

On dit que f est continue à gauche en x_0 si $\lim\limits_{x \to {x_0}^-} f(x) = f(x_0)$.

Proposition 4

Une fonction numérique f est continue au point x_0 si et seulement si elle est continue à droite et à gauche au point x_0.

En d'autres termes :

(f est continue au point x_0)$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to {x_0}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to {x_0}^-} f(x) = f(x_0)$

Applications

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x+1} & (x \leq 0) \\ f(x) = \frac{x^2-x}{x+3} & (x > 0) \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de la fonction f en 0.

Soit g la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} g(x) = x^2 + 2x & (x \leq 1) \\ g(x) = \frac{a\sin(x-1)}{x-1} & (x > 1) \end{cases}$$

2. Déterminer la valeur du réel a pour que la fonction g soit continue au point $x_0 = 1$.

On considère la fonction h définie par :

$$\begin{cases} h(x) = \frac{\left|\sqrt{2}-2\cos x\right|}{4\pi-\mathrm{x}} & \left(x \neq \frac{\pi}{4}\right) \\ h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

3. Montrer que la fonction h n'est pas continue au point $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

3-3/ Prolongement par continuité en un point

Définition 4

Soit f une fonction numérique non définie en un point x_0 $\left(x_0 \in D_f\right)$ et admettant une limite finie l au point x_0 : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \mathrm{l}$.

La fonction $\tilde{f}$ définie sur $D_{\tilde{f}} = D_f \cup \{x_0\}$ par $\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) & \left(x \in D_f\right) \\ \tilde{f}(x_0) = \mathrm{l} \end{cases}$

est continue au point x_0 , et est appelée le prolongement par continuité de f au point x_0 .

Applications

Pour chacun des cas suivants, montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité au point x_0 puis donner ce prolongement :

$$1 \quad f(x) = \frac{x^3-2x^3+3x+6}{x+1} \quad (x_0 = -1)$$
$$2 \quad f(x) = \frac{x\sin x}{\cos x - 1} \quad (x_0 = 0)$$
$$3 \quad f(x) = \frac{\left|x^2+4x\right|-3}{x+3} \quad (x_0 = -3)$$
$$4 \quad f(x) = (x-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \quad (x_0 = 1)$$

3-4/ Continuité d'une fonction sur un intervalle

Définition 5

1- Une fonction f est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout point de I.

En particulier : f est continue sur $]a,b[$ si elle est continue en tout point de $]a,b[$.

2- Une fonction f est continue sur $[a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$ et continue à droite en a et à gauche en b.

3- Une fonction f est continue sur $[a,b[$ si elle est continue sur $]a,b[$ et continue à droite en a.

4- Une fonction f est continue sur $]a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$ et continue à gauche en b.

Application

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
$f(x) = x - E(x)$

1. Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[1,2[$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction est continue sur l'intervalle $[k, k+1[$.

3-5/ Opérations sur les fonctions continues

Proposition 5

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et k un nombre réel.

Alors :

(1) Les fonctions $f+g$, $k.f$ et $f.g$ sont continues sur I.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$*, la fonction f^n : $x \mapsto (f(x))^n$ est continue sur I.

(3) Si la fonction g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.

(4) La fonction $|f|$ est continue sur I.

(5) Si f est positive sur I, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Applications

1. Dans chacun des^cas suivants, montrer que la fonction f est continue sur son domaine de définition :

$$1 \;\; f(x) = \frac{4x+5}{x^2+3}\sin x$$
$$2 \;\; f(x) = |2x-3| + \frac{x+1}{x^2+x+1}$$
$$3 \;\; f(x) = x^2 - \tan x - 1$$

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{4-x}$

2. Montrer que g est continue sur l'intervalle $[2;4[$.
3. Étudier la continuité de la fonction $x \mapsto xE(x)$ sur l'intervalle $[0;2]$.

3-6/ Continuité de la composée de deux fonctions

Proposition 6

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, et soit x_0 un élément de I.

Si f est continue au point x_0 et g est continue au point $f\left(x_0\right)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en x_0.

Corollaire

Si f est continue sur un intervalle I et g est continue sur un intervalle J tel que $f\left(I\right) \subset J$, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur l'intervalle I.

Applications

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f sur les intervalles de D_f :

$$1 \;\; f\left(x\right) = \sin\left(\frac{2x+1}{x^2-1}\right)$$
$$2 \;\; f\left(x\right) = \sqrt{\frac{x-3}{x+2}}$$
$$3 \;\; f\left(x\right) = \cos\left(\sqrt{x^2+1}\right)$$
$$4 \;\; f\left(x\right) = \sqrt{1-\sin x}$$
$$5 \;\; f\left(x\right) = \cos\left(\tan^2 x\right)$$

3-7/ Composée d'une fonction continue et d'une fonction admettant une limite

Proposition 7

Soit f une fonction définie sur l'ensemble $\left]x_0-r, x_0+r\right[\;\; \left(r>0\right)$ et g la fonction définie sur un intervalle ouvert J centré en l tel que $f\left(I\right) \subset J$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) = \mathrm{l}$ et g est continue en l alors : $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f\left(x\right) = g\left(\mathrm{l}\right)$

Remarque

La proposition 7 reste valable en x_0 à droite ou x_0 à gauche ou en $+\infty$ ou en $-\infty$ à condition de remplacer l'intervalle I par un intervalle convenable.

Applications

Calculer les limites suivantes :

$$1 \;\; \lim_{x \to +\infty}\left(x-2\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^3$$
$$2 \;\; \lim_{x \to 0} \tan\left(\frac{\pi \mathrm{sinx}}{3x}\right)$$
$$3 \;\; \lim_{x \to -\infty} \cos\left(\frac{\pi \mathrm{x}+1}{x+2}\right)$$
$$4 \;\; \lim_{x \to +\infty} \cos\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

IV- Image d'un intervalle par une fonction continue

4-1/ Image d'un segment par une fonction continue

Proposition 8

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

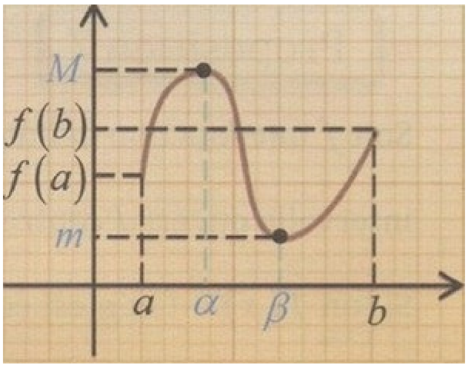
Autrement dit :

$$(f \text{ continue sur } [a,b]) \Rightarrow f([a,b]) = [m,\ M\,]$$

Remarque

Si f est continue sur un segment $[a,b]$, alors $M = f(\alpha)$ est le ntaximum de f sur $[a,b]$ et $m = f(\beta)$ est le minimum de f sur $[a,b]$.

On a alors : $f\left([a,b]\right) = [m,\ M\,]$



Proposition 9

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Remarque

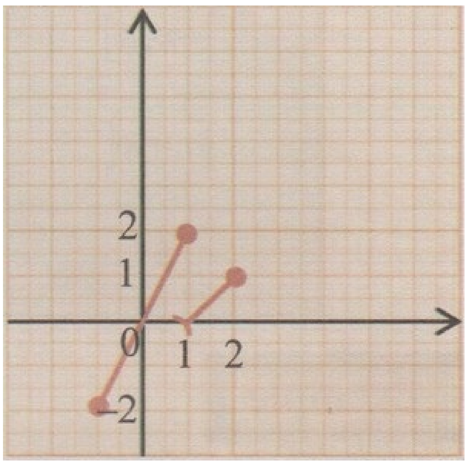
La continuité d'une fonction est une condition suffisante pour que l'image d'un intervalle soit un intervalle, mais cette condition n'est pas évidemment nécessaire.

En effet, il se peut que l'image d'un intervalle par une fonction discontinue soit un intervalle comme le montre l'exemple suivant :

Considérons la fonction f définie sur $[-1;2]$ par :

$$\begin{cases} f\left(x\right) = 2x \ si \ x \in [-1;1] \\ f\left(x\right) = x - 1 \ si \ x \in]1;2] \end{cases}$$

L'image de l'intervalle $[-1;2]$ par la fonction f est l'intervalle $[-2;2]$ bien que la fonction f ne soit pas continue sur $[-1;2]$.



Les intervalles I et $f(I)$ ne sont pas toujours de même nature. A titre d'exemple, l'image de l'intervalle semi-ouvert $]-1;2]$ par la fonction $x \mapsto x^2$ est le segment $[0;4]$.

Applications

Pour chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle I, puis déterminer $f(I)$:

$$1\ \ f(x) = x^2 + 2\ ;\ I = [-1;3]$$
$$2\ \ f(x) = \frac{x-4}{x-2}\ ;\ I = [5;8]$$
$$3\ \ f(x) = 2x\sqrt{x+1}\ ;\ I = [3;5]$$
$$4\ \ \begin{cases} f(x) = x + 3\ si\ x \leq 2 \\ f(x) = x^2 + 1\ si\ x > 2 \end{cases}\ ;\ I = [-3;5]$$

4-2/ Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

On a alors les résultats suivants :

	L'image de l'intervalle I par la fonction f	
L'intervalle I	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
$[a,b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a,b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(a)\right]$
$]-\infty,a]$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), f(a)\right]$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 3$

Déterminer les images des intervalles suivants par la fonction f :

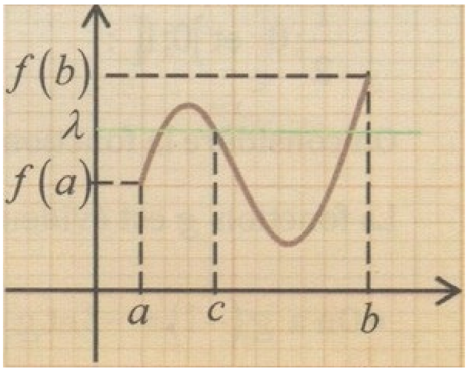
$$I = \left]-\infty;0\right]\ -\ J = [1;2]\ -\ K = \left]-5;-1\right[\ -\ L = \left[\sqrt{2};+\infty\right[$$

4-3/ Théorème des valeurs intermédiaires

Proposition 10

Si f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ alors, pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel c appartenant à l'intervalle $[a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

En d'autres termes : l'équation $f(x) = \lambda$ d'inconnue x admet au moins une solution dans $[a,b]$, pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$.



Corollaire

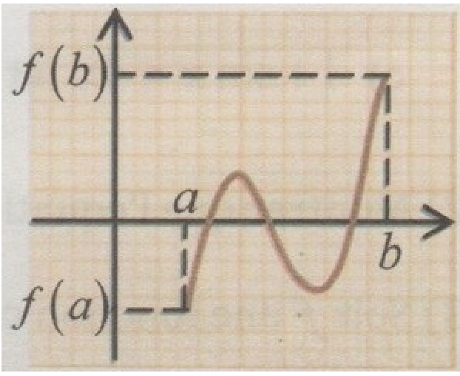
Si la fonction f est continue sur $[a,b]$ tel que $f(a).\, f\,(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au
moins une solution dans l'intervalle $[a,b]$.

Si de plus, la fonction f est strictement monotone, cette solution est unique.

Remarque

On peut interpréter le résultat du corollaire précédent comme suit :

Si la fonction f est continue sur $[a,b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors le graphe coupe l'axe des abscisses, au moins une fois, en un point dont l'abscisse appartient à $[a,b]$.



Applications

1. Montrer que chacune des équations suivantes admet au moins une solution dans l'intervalle I :

$$1 \;\; x^4 + x^2 + 4x - 1 = 0 \;;\; I = [0;1]$$
$$2 \;\; 2\cos x - x = 0 \;;\; I = [0;\pi]$$
$$3 \;\; 1 + \sin x = 4x \;;\; I = \left[0;\tfrac{\pi}{2}\right]$$
$$4 \;\; \tan x + x^2 = 2 \;;\; I = \left]\tfrac{\pi}{4};\tfrac{\pi}{3}\right[$$

2. Montrer que l'équation $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-2;0]$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que :
$(\forall x \in I)\; f\,(x) \neq 0$

3. Montrer par l'absurde que la fonction f garde un signe constant sur l'intervalle I.

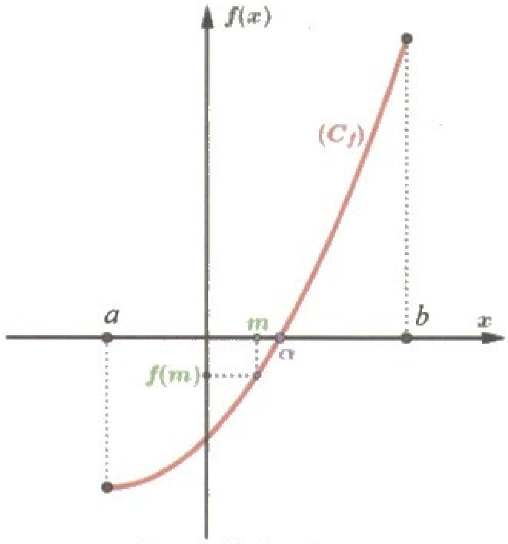
4-4/ Principe de la méthode de dichotomie

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ telle que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[a, b]$.

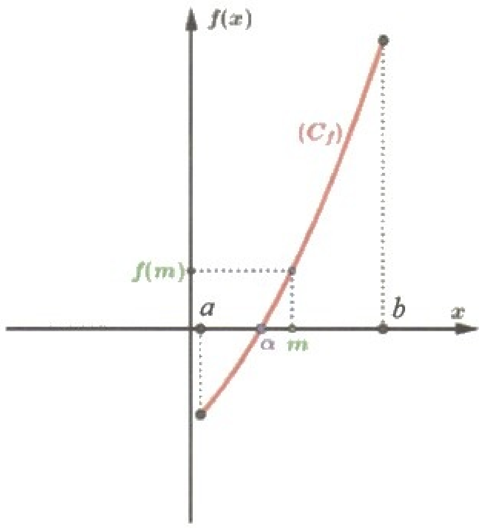
Pour déterminer un encadrement du nombre α, on démarre donc en ayant localisé la racine α entre a et b $(a < \alpha < b)$; et on sait par exemple que sur cet intervalle, la fonction f (continue) est strictement croissante.

On calcule alors le centre m du segment $[a, b]$ (à savoir $m = \frac{a+b}{2}$), puis son image par f : $f(m)$, et on la compare à 0.

Deux cas peuvent alors se produire :



Cas où $f(m) < 0$
On a alors $m < \alpha < b$. On reprend la bissection de l'intervalle en posant :
$a = m$ *et* $b = b$
puis on continue comme précédemment...



Cas où $f(m) > 0$
On a alors $a < \alpha < m$. On reprend la bissection de l'intervalle en posant :
$a = a$ *et* $b = m$
puis on continue comme précédemment...