



Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 1-1-1 : Limites et continuité - Partie 1 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Limites d'une fonction en un point

1-1/ Rappels et compléments

1-2/ Unicité de la limite

1-3/ Limites des fonctions usuelles

1-4/ Opérations sur les limites

I- Limites d'une fonction en un point

1-1/ Rappels et compléments

Définition 1

Soit f une fonction numérique telle que

$(\exists r > 0) ;]x_0 - r, x_0 + r[- \{x_0\} \subset D_f$ et $l \in \mathbb{R}$.

On dit que la limite de f en x_0 est l , ou encore, $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0 , si :

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \alpha > 0) (\forall x \in D_f) (0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

Application

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

1. Montrer que pour tout $x \in]0; 2[: \left| f(x) - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{1}{2} |x - 1|$
2. En utilisant la définition, montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{2}$

1-2/ Unicité de la limite

Proposition 1

Si la limite d'une fonction numérique f existe en un point, alors elle est unique.

Preuve

1-3/ Limites des fonctions usuelles

Proposition 2

Soit P et Q deux fonctions polynomiales et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Alors :

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

$$2 \quad Q(x_0) \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

$$5 \quad x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0$$

$$6 \quad x_0 \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$$

$$7 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

1-4/ Opérations sur les limites

Proposition 3

Soit f et g deux fonctions numériques et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l'$, alors :

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = l + l'$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = l \cdot l'$$

$$3 \quad l' \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{g} \right)(x) = \frac{1}{l'} \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{l}{l'}$$