Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 2-1-2 : Suites numériques - Partie 1 (Exercices)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

II- Exercices I

2-1/ Exercice 1-1

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.
2. En déduire que $(U_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

2-2/ Exercice 1-2

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_0 = -1$, $U_1 = \frac{1}{2}$ et
$U_{n+2} = U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n$.
On pose $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$ et $W_n = 2^n U_n$.

1. Montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique puis calculer V_n en fonction de n.
2. Montrer que $(W_n)_n$ est une suite arithmétique puis calculer W_n en fonction de n.
3. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k$.

4. Prouver que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

2-3/ Exercice 1-3

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}\left({U_n}^2 - U_n + \frac{1}{2}\right)}$.

On pose $V_n = {U_n}^2 - U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n \geq 1$
2. Montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique.
3. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{8}{2^n}}$.
4. Démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 0 < U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

2-4/ Exercice 1-4

$(U_n)_n$ est une suite réelle telle que $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{6U_n}{1+15U_n}$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n > \frac{1}{3}$.
2. Étudier la monotonie de $(U_n)_n$, et en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n \leq 1$
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_{n+1} - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{6}\left(U_n - \frac{1}{3}\right)$
4. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n - \frac{1}{3} \leq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

On pose $V_n = 1 - \frac{1}{3U_n}$ pour tout entier naturel n.

5. Montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$.
6. Calculer V_n puis U_n en fonction de n.

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} V_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{U_k}$

7. Déterminer S_n en fonction de n.
8. En déduire que $T_n = 3n + \frac{3}{5} + \frac{12}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$