AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 1-3-2 : Limites et continuité - Partie 3 (Exercices)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

IIX- Exercices III

8-1/ Exercice 3-1

Dans chacun des cas suivants, montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer, puis déterminer une expression de $f^{-1}(x)$:

$$1 \;\; f(x) = x^2 - 6x + 5 \;\; ; \;\; I = \left]-\infty; 3\right[$$

$$2 \;\; f(x) = \frac{x^2+4x}{x+2} \;\; ; \;\; I = \left[2; +\infty\right[$$

$$3 \;\; f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \;\; ; \;\; I = \mathbb{R}^+$$

$$4 \;\; f(x) = \left(\sqrt{3-x}+1\right)^2 \;\; ; \;\; I = \left]-\infty; 3\right]$$

$$5 \;\; f(x) = x - \sqrt{x^2 - x} \;\; ; \;\; I = \left[1; +\infty\right[$$

$$6 \;\; f(x) = 2x - \sqrt{x} \;\; ; \;\; I = \left[0; \frac{1}{16}\right]$$

8-2/ Exercice 3-2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1 \;\; x^4 - 5x^2 - 24 = 0$$

$$2 \;\; x^6 + 3x^3 - 4 = 0$$

$$3 \;\; \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 5x + 8} - \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 5x + 1} = 1$$

$$4 \;\; \sqrt[4]{\frac{2-x}{3+x}} + \sqrt[4]{\frac{3+x}{2-x}} = 2$$

$$5\ \left(\sqrt[3]{x}-1\right)^3-27=0$$
$$6\ \sqrt[3]{x+8}-\sqrt[3]{8-x}=\sqrt[6]{64-x^2}$$

8-3/ Exercice 3-3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$1\ \sqrt{x+2}<x$$
$$2\ \sqrt{2x+1}-3<\sqrt{x+2}$$
$$3\ (2-x)^3\leq x$$
$$4\ \sqrt[3]{x^2+8}-2<x$$

8-4/ Exercice 3-4

Calculer les limites suivantes :

$$1\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$$
$$2\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}-x}{x}$$
$$3\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}+1}$$
$$4\ \lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt[3]{x+6}}{3-\sqrt{2x+5}}$$
$$5\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt[4]{x}-1}$$
$$6\ \lim_{x\to +\infty}\sqrt[3]{x^3+x}-x$$
$$7\ \lim_{x\to +\infty}x-\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}$$

8-5/ Exercice 3-5

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$A=Arc\tan 2+Arc\tan\frac{1}{2}$$
$$B=Arc\tan\left(1-\sqrt{2}\right)-Arc\tan\left(1+\sqrt{2}\right)$$

2. Établir les égalités suivantes :

$$Arc\tan\frac{1}{2}+Arc\tan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$
$$Arc\tan\frac{1}{2}+Arc\tan\frac{1}{5}+Arc\tan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$
$$4Arc\tan\frac{1}{5}-Arc\tan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$$

On pose : $\alpha=2Arc\tan\frac{1}{2}-Arc\tan\frac{1}{7}$

3. Vérifier que $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$.
4. Calculer $\tan\alpha$ puis en déduire la valeur de α.

8-6/ Exercice 3-6

On considère la fonction h définie par $h(x) = Arc\tan\left(\frac{x^2-4x+2}{x^2-2}\right)$

1. Déterminer D_h le domaine de définition de h.
2. Calculer les limites de h aux bornes du D_h.
3. Montrer que h réalise une bijection de $K = \left]\sqrt{2}; +\infty\right[$ à valeurs dans un intervalle L à déterminer.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left]\sqrt{2}-1; +\infty\right[$ par $f(x) = h(x+1)$.

4. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer puis déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.