AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 1-1-1 : Limites et continuité - Partie 1 (Cours)

**Professeur : Mr CHEDDADI Haitam**

Sommaire

I- Limites d'une fonction en un point

1-1/ Rappels et compléments

1-2/ Unicité de la limite

1-3/ Limites des fonctions usuelles

1-4/ Opérations sur les limites

---

# I- Limites d'une fonction en un point

## 1-1/ Rappels et compléments

### Définition 1

Soit $f$ une fonction numérique telle que $(\exists r > 0)$ ; $]x_0 - r, x_0 + r[ - \{x_0\} \subset D_f$ et $l \in \mathbb{R}$.

On dit que la limite de $f$ en $x_0$ est l, ou encore, $f(x)$ tend vers l lorsque $x$ tend vers $x_0$ , si :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha > 0)\ \ (\forall x \in D_f)\ \ (0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

### Application

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par : $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

1. Montrer que pour tout $x \in ]0;2[$ : $\left|f(x) - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{2}|x-1|$
2. En utilisant la définition, montrer que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{3}{2}$

## 1-2/ Unicité de la limite

### Proposition 1

Si la limite d'une fonction numérique $f$ existe en un point, alors elle est unique.

### Preuve

## 1-3/ Limites des fonctions usuelles

### Proposition 2

Soit $P$ et $Q$ deux fonctions polynomiales et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Alors :

$$1 \quad \lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

$$2 \quad Q(x_0) \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

$$3 \quad \lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

$$4 \quad \lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$$

$$5 \quad x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \tan x = \tan x_0$$

$$6 \quad x_0 \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$$

$$7 \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \; ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \; ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

## 1-4/ Opérations sur les limites

### Proposition 3

Soit $f$ et $g$ deux fonctions numériques et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \mathrm{l}$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \mathrm{l'}$, alors :

$$1 \quad \lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \mathrm{l} + \mathrm{l'}$$

$$2 \quad \lim_{x \to x_0} (f.g)(x) = \mathrm{l}.\mathrm{l'}$$

$$3 \quad \mathrm{l'} \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{\mathrm{l'}} \; et \; \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{l'}}$$