AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 1-1-1 : Limites et continuité - Partie 1 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Limites d’une fonction en un point

1-1/ Rappels et compléments

Définition 1

Soit f une fonction numérique telle que
$(\exists r>0)$; $]x_0-r,x_0+r[-\{x_0\}\subset D_f$ et $\mathrm{l}\in\mathbb{R}$.

On dit que la limite de f en x_0 est l, ou encore, $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0 , si :

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\alpha>0)\,\left(\forall x\in D_f\right)\,\left(0<|x-x_0|<\alpha\Rightarrow|f(x)-\mathrm{l}|<\varepsilon\right)$$

On écrit : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{l}$

Application

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$

1. Montrer que pour tout $x\in]0;2[$: $\left|f(x)-\frac{3}{2}\right|\leq\frac{1}{2}|x-1|$
2. En utilisant la définition, montrer que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\frac{3}{2}$

1-2/ Unicité de la limite

Proposition 1

Si la limite d'une fonction numérique f existe en un point, alors elle est unique.

Preuve

1-3/ Limites des fonctions usuelles

Proposition 2

Soit P et Q deux fonctions polynomiales et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Alors :

$$1 \ \lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

$$2 \ Q(x_0) \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

$$3 \ \lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

$$4 \ \lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$$

$$5 \ x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \tan x = \tan x_0$$

$$6 \ x_0 \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$$

$$7 \ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \ ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \ ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

1-4/ Opérations sur les limites

Proposition 3

Soit f et g deux fonctions numériques et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \mathrm{l}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \mathrm{l'}$, alors :

$$1 \ \lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \mathrm{l} + \mathrm{l'}$$

$$2 \ \lim_{x \to x_0} (f.g)(x) = \mathrm{l}.\mathrm{l'}$$

$$3 \ \mathrm{l'} \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{\mathrm{l'}} \ et \ \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{\mathrm{l'}}$$