AlloSchool

Physique et Chimie : 2ème Année Bac

Séance 26B (Aspects énergétiques – Pendule pesant et de torsion)

**Professeur : Mr EL GOUFIFA Jihad**

Sommaire

I- Pendule de torsion

1-1/ Énergie cinétique

1-2/ Énergie potentielle de torsion

1-3/ Énergie mécanique

1-4/ Diagramme énergétique

II- Pendule pesant

2-1/ Énergie cinétique

2-2/ Énergie potentielle de pesanteur

2-3/ Énergie mécanique

2-4/ Diagramme énergétique

III- Exercices

3-1/ Exercice 1

3-2/ Exercice 2

3-3/ Exercice 3

---

# I- Pendule de torsion

## 1-1/ Énergie cinétique

On considère un pendule de torsion formé d'un fil métallique léger auquel est fixé une tige dense.

Soit $J_\Delta$ le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation matérialisé par le fil métallique et $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de la tige à instant $t$.

On définit l'énergie cinétique du système qu'est en rotation autour de $(\Delta)$, à cet instant $t$ par l'expression suivante : $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta . \dot{\theta}^2$

## 1-2/ Énergie potentielle de torsion

L'énergie potentielle de torsion d'un pendule de torsion est définie par la relation :
$E_{pt} = \frac{1}{2}C.\theta^2 + Cte$

Avec $C$ la constante de la torsion du pendule, $\theta$ angle de torsion en rad et $Cte$ une constante qui dépend du choix de l'état de référence fourni par les conditions initiales.

En générale , on prend $E_{pt} = 0$ pour $\theta = \theta_0 = 0$ ; soit $Cte = 0$ d'où $E_{pt} = \frac{1}{2}C.\theta^2$

## 1-3/ Énergie mécanique

On a :

$$E_m = E_c + E_{pt}$$
$$E_m = \frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2$$

Les oscillations sont non-amorties, donc on a un échange entre l'énergie potentielle et cinétique, alors que celle mécanique reste constante.

On dérive $E_m$ par rapport au temps :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2\right) = 0$$
$$\Rightarrow J_\Delta \dot{\theta}\ddot{\theta} + C\theta\dot{\theta} = 0$$
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$$

C'est la même équation différentielle obtenue à partir de l'étude dynamique.

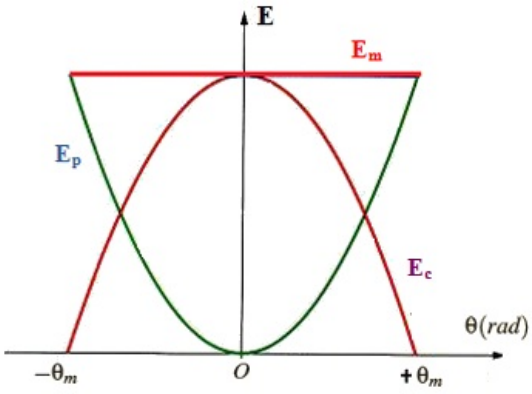
## 1-4/ Diagramme énergétique

Les frottements sont négligeables, donc on a une conservation d'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 = Cte$$

Lorsque la tige passe par sa position d'équilibre : $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = \pm\dot{\theta}_m$, soit $E_p = 0$ et $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}_m{}^2$

Lorsque la tige passe par ses positions extrêmes : $\theta = \pm\theta_m$ et $\dot{\theta} = 0$, soit $E_p = \frac{1}{2}C\theta_m{}^2$ et $E_c = 0$




# II- Pendule pesant

## 2-1/ Énergie cinétique

L'énergie cinétique du pendule pesant est :

$$E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$$

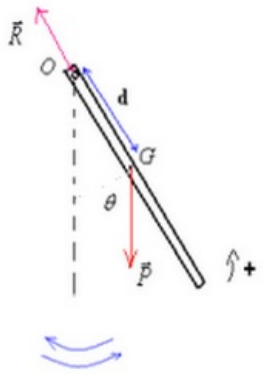
## 2-2/ Énergie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle de pesanteur du pendule pesant est : $E_{pp} = m.g.z + Cte$

En considérant comme état de référence $E_{pp} = 0$ lorsque $z = 0$ $(G = G_0 = O)$, la constante $Cte = 0$ et donc: $E_{pp} = m.g.z$

Lorsque le pendule pesant est incliné d'un angle $\theta$, son énergie potentielle de pesanteur est :

$$E_{pp} = m.g.z$$
$$E_{pp} = m.g\,(d - OG_0)$$
$$E_{pp} = m.g\,(d - d\cos\theta)$$
$$E_{pp} = m.g.d\,(1 - \cos\theta)$$




## 2-3/ Énergie mécanique

On a :

$$E_m = E_c + E_{pp}$$
$$E_m = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + mgd\,(1 - \cos\theta)$$

Les oscillations sont non-amorties, donc on a un échange entre l'énergie potentielle et cinétique, alors que celle mécanique reste constante.

On dérive $E_m$ par rapport au temps :

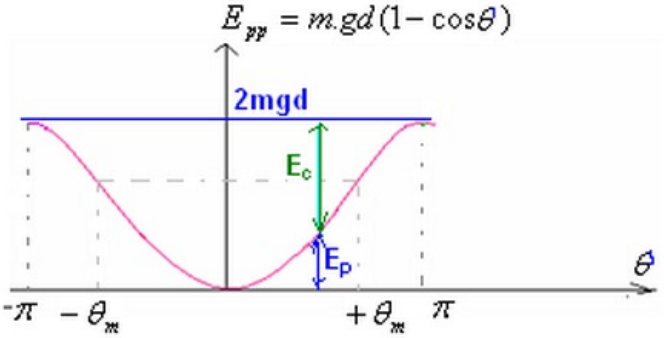
$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + mgd\,(1 - \cos\theta)\right) = 0$$
$$\Rightarrow J_\Delta \dot{\theta}\ddot{\theta} + mgd\sin\theta\dot{\theta} = 0$$
$$\Rightarrow J_\Delta \ddot{\theta} + mgd\theta = 0 \;\; (\sin\theta \approx \theta)$$
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}\theta = 0$$

C'est la même équation différentielle obtenue à partir de l'étude dynamique.

## 2-4/ Diagramme énergétique

Les frottements sont négligeables, donc on a une conservation d'énergie mécanique :

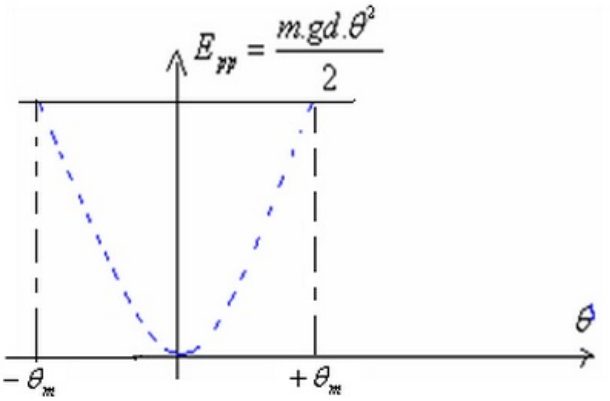
$$E_m = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + mgd\,(1 - \cos\theta) = Cte$$




Pour les petites oscillations ($\theta < 15^\circ$) , on a $1 - \cos\theta = \frac{\theta^2}{2}$

Donc on peut écrire par approximation : $E_{pp} = \frac{mgd\theta^2}{2}$

Et on obtient le diagramme suivant :



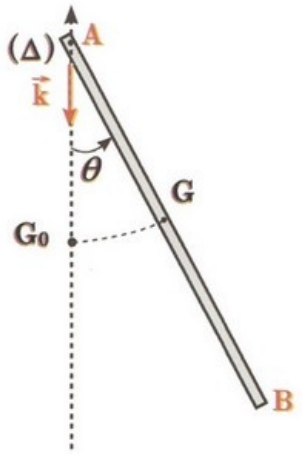

# III- Exercices

## 3-1/ Exercice 1

Une tige $AB$ homogène de masse $m$ et de longueur $AB = l = 60,0cm$ pouvant tourner dans un plan vertical autour d'un axe $(\Delta)$ horizontal fixe passant par son extrémité A.

Le moment d'inertie de cette tige par rapport à l'axe $(\Delta)$ est $J_\Delta = \frac{1}{3}m.l^2$.

On repère à chaque instant la position du pendule pesant par l'abscisse angulaire orienté $\theta\left(\overrightarrow{k};\overrightarrow{AB}\right)$ :




On choisit le plan horizontal contenant le point $G_0$ position du centre d'inertie $G$ de la tige à l'équilibre comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur ($E_p = 0$).

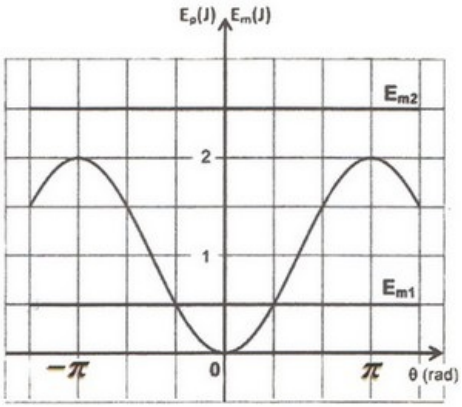
On admet dans le cas de faible amplitude que $1-\cos\theta \approx \frac{\theta^2}{2}\ \left(rad\right)$, et on prend $g = 9,80\ m.s^{-2}$.

1. Montrer que l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du pendule pesant peut s'écrire sous la forme : $E_P = m.g.\frac{1}{2}\left(1-\cos\theta\right)$.
2. Dans le cas de faible amplitude, écrire l'expression de l'énergie mécanique à un instant $t$ en fonction de $m$, l, $g$, $\theta$ et $\frac{d\theta}{dt}$.
3. En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse angulaire dans le cas de faible amplitude.

On lance la tige $AB$ à partir de sa position d'équilibre avec une vitesse initiale. Elle acquiert dans chaque cas une énergie mécanique donnée :

- dans le cas 1 : $E_m = E_{m_1}$
- dans le cas 2 : $E_m = E_{m_2}$

Le diagramme suivant donne l'évolution de l'énergie potentielle $E_p$ et de l'énergie mécanique $E_m$ du pendule pesant dans chaque cas :




4. Déterminer à l'aide du diagramme, la nature du mouvement du pendule dans chaque cas.
5. Préciser à partir du diagramme, la valeur maximale de l'abscisse angulaire $\theta$ du pendule dans le cas 1. En déduire la masse de la tige.

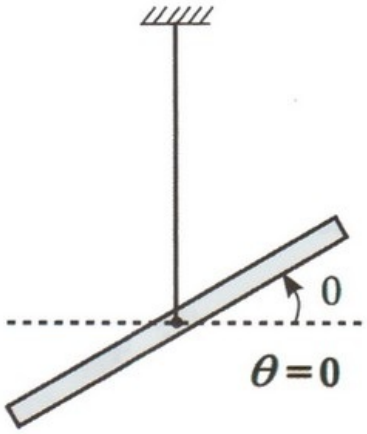
Dans le deuxième cas, l'énergie cinétique du pendule pesant varie entre une valeur minimale $E_{C_{min}}$ et une valeur maximale $E_{C_{max}}$.

6. Trouver les valeurs de $E_{C_{min}}$ et $E_{C_{max}}$.

## 3-2/ Exercice 2

On considère un pendule de torsion constitué d'un fil de torsion et d'une barre homogène de moment d'inertie $J_\Delta$.

On écarte la barre de sa position d'équilibre d'un angle $\theta_m = \frac{\pi}{10} rad$ par rapport à la position d'équilibre $\theta = 0$, et on la libère sans vitesse initiale à l'instant $t_0 = 0$ :



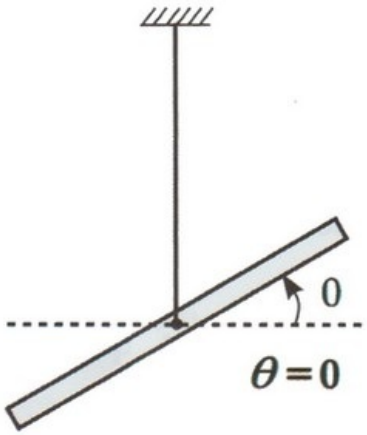

Les amortissements sont négligeables.

1. Montrer que le mouvement de la barre est un mouvement oscillatoire sinusoïdale.
2. Montrer que $\dot{\theta}_m = \frac{2\pi}{T_0}.\theta_m$ où $T_0$ désigne la période propre du mouvement du pendule.
3. Sachant que $T_0 = 0,2s$, et la constante de torsion $C = 1,2N.m.rad^{-1}$, calculer l'énergie cinétique maximale du pendule de torsion.

## 3-3/ Exercice 3

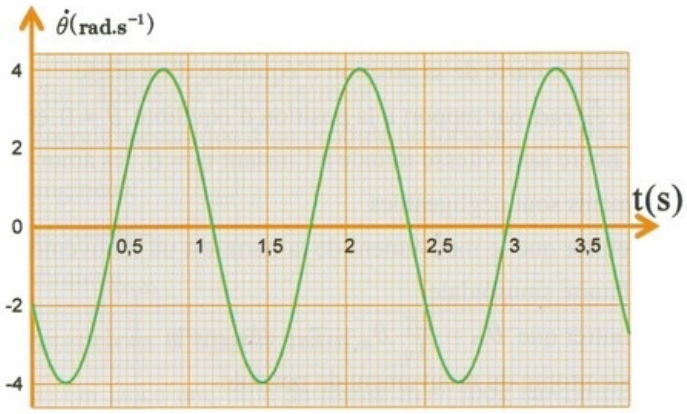
On étudie le mouvement d'un pendule de torsion dans un repère lié à un référentiel terrestre supposé galiléen.

On repère la position de la tige MN à chaque instant par l'abscisse angulaire orientée $\theta = \left(\overrightarrow{GM_0}; \overrightarrow{GM}\right)$ comme l'indique la figure suivante :




On prend pour état de référence de l'énergie potentielle de torsion $E_{pt} = 0$ pour $\theta = 0$, et on prend $\pi^2 = 10$.

Le pendule effectue des oscillations d'amplitude $\theta_m = \frac{\pi}{4}rad$. L'étude expérimentale a permis d'obtenir la courbe suivante :




1. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le cas de la rotation, établir l'équation différentielle du mouvement du pendule.

La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme $\theta(t) = \theta_m . \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ où $T_0$ est la période propre du pendule.

2. Montrer que l'expression numérique de la vitesse angulaire s'écrit sous la forme $\dot{\theta}(t) = 4. \sin\left(1,6.\pi.t + \frac{7\pi}{6}\right)$.
3. Déterminer la valeur de la constante de torsion $C$.
4. Déterminer la valeur de l'énergie mécanique de l'oscillateur et en déduire la valeur de son énergie potentielle à l'origine des dates ($t_0 = 0$).