

Sommaire**I- Pendule de torsion**

1-1/ Énergie cinétique

1-2/ Énergie potentielle de torsion

1-3/ Énergie mécanique

1-4/ Diagramme énergétique

**II- Pendule pesant**

2-1/ Énergie cinétique

2-2/ Énergie potentielle de pesanteur

2-3/ Énergie mécanique

2-4/ Diagramme énergétique

**III- Exercices**

3-1/ Exercice 1

3-2/ Exercice 2

3-3/ Exercice 3

**I- Pendule de torsion**

1-1/ Énergie cinétique

On considère un pendule de torsion formé d'un fil métallique léger auquel est fixé une tige dense.

Soit  $J_{\Delta}$  le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation matérialisé par le fil métallique et  $\dot{\theta}$  est la vitesse angulaire de la tige à instant  $t$ .

On définit l'énergie cinétique du système qu'est en rotation autour de ( $\Delta$ ), à cet instant  $t$  par l'expression suivante :  $E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \dot{\theta}^2$

1-2/ Énergie potentielle de torsion

L'énergie potentielle de torsion d'un pendule de torsion est définie par la relation :

$$E_{pt} = \frac{1}{2}C.\theta^2 + Cte$$

Avec  $C$  la constante de la torsion du pendule,  $\theta$  angle de torsion en rad et  $Cte$  une constante qui dépend du choix de l'état de référence fourni par les conditions initiales.

En générale , on prend  $E_{pt} = 0$  pour  $\theta = \theta_0 = 0$  ; soit  $Cte = 0$  d'où  $E_{pt} = \frac{1}{2}C.\theta^2$

### 1-3/ Énergie mécanique

On a :

$$E_m = E_c + E_{pt}$$

$$E_m = \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2$$

Les oscillations sont non-amorties, donc on a un échange entre l'énergie potentielle et cinétique, alors que celle mécanique reste constante.

On dérive  $E_m$  par rapport au temps :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow J_{\Delta}\dot{\theta}\ddot{\theta} + C\theta\dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{C}{J_{\Delta}}\theta = 0$$

C'est la même équation différentielle obtenue à partir de l'étude dynamique.

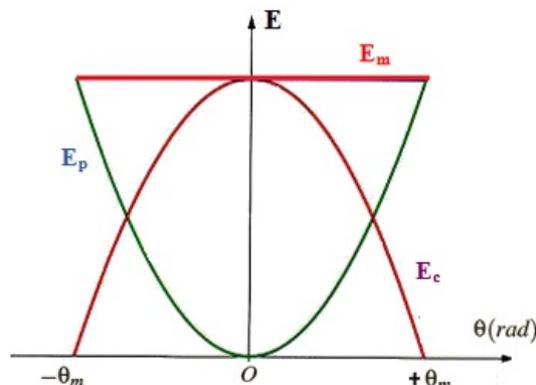
### 1-4/ Diagramme énergétique

Les frottements sont négligeables, donc on a une conservation d'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 = Cte$$

Lorsque la tige passe par sa position d'équilibre :  $\theta = 0$  et  $\dot{\theta} = \pm\dot{\theta}_m$ , soit  $E_p = 0$  et  $E_c = \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}_m^2$

Lorsque la tige passe par ses positions extrêmes :  $\theta = \pm\theta_m$  et  $\dot{\theta} = 0$ , soit  $E_p = \frac{1}{2}C\theta_m^2$  et  $E_c = 0$



## II- Pendule pesant

### 2-1/ Énergie cinétique

L'énergie cinétique du pendule pesant est :

$$E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2$$

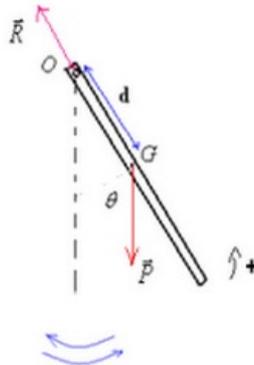
## 2-2/ Énergie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle de pesanteur du pendule pesant est :  $E_{pp} = m \cdot g \cdot z + Cte$

En considérant comme état de référence  $E_{pp} = 0$  lorsque  $z = 0$  ( $G = G_0 = O$ ), la constante  $Cte = 0$  et donc:  $E_{pp} = m \cdot g \cdot z$

Lorsque le pendule pesant est incliné d'un angle  $\theta$ , son énergie potentielle de pesanteur est :

$$\begin{aligned} E_{pp} &= m \cdot g \cdot z \\ E_{pp} &= m \cdot g (d - OG_0) \\ E_{pp} &= m \cdot g (d - d \cos \theta) \\ E_{pp} &= m \cdot g \cdot d (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$



## 2-3/ Énergie mécanique

On a :

$$\begin{aligned} E_m &= E_c + E_{pp} \\ E_m &= \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + mgd(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

Les oscillations sont non-amorties, donc on a un échange entre l'énergie potentielle et cinétique, alors que celle mécanique reste constante.

On dérive  $E_m$  par rapport au temps :

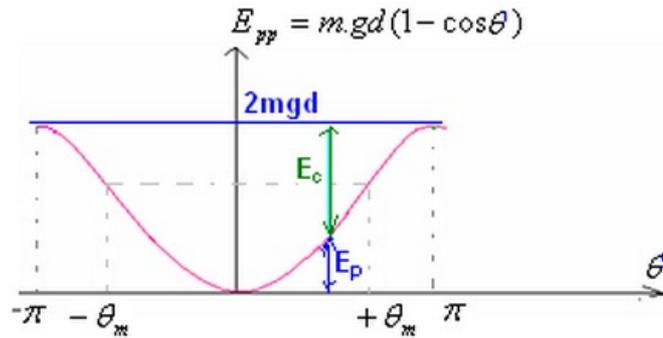
$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + mgd(1 - \cos \theta) \right) &= 0 \\ \Rightarrow J_{\Delta} \dot{\theta} \ddot{\theta} + mgd \sin \theta \dot{\theta} &= 0 \\ \Rightarrow J_{\Delta} \ddot{\theta} + mgd \theta &= 0 \quad (\sin \theta \approx \theta) \\ \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_{\Delta}} \theta &= 0 \end{aligned}$$

C'est la même équation différentielle obtenue à partir de l'étude dynamique.

## 2-4/ Diagramme énergétique

Les frottements sont négligeables, donc on a une conservation d'énergie mécanique :

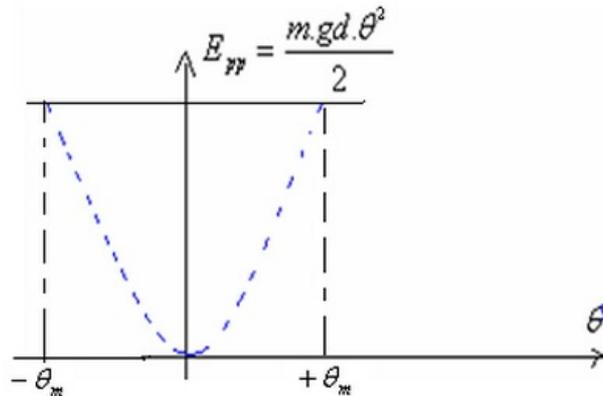
$$E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + mgd(1 - \cos \theta) = Cte$$



Pour les petites oscillations ( $\theta < 15^\circ$ ), on a  $1 - \cos\theta = \frac{\theta^2}{2}$

Donc on peut écrire par approximation :  $E_{pp} = \frac{mgd\theta^2}{2}$

Et on obtient le diagramme suivant :



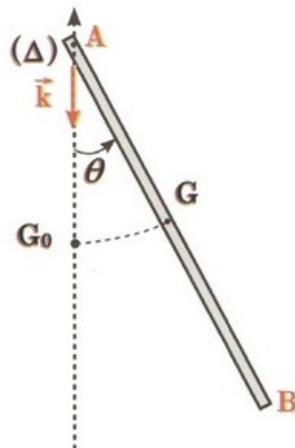
### III- Exercices

#### 3-1/ Exercice 1

Une tige  $AB$  homogène de masse  $m$  et de longueur  $AB = l = 60,0\text{cm}$  pouvant tourner dans un plan vertical autour d'un axe  $(\Delta)$  horizontal fixe passant par son extrémité  $A$ .

Le moment d'inertie de cette tige par rapport à l'axe  $(\Delta)$  est  $J_\Delta = \frac{1}{3}m \cdot l^2$ .

On repère à chaque instant la position du pendule pesant par l'abscisse angulaire orienté  $\theta \left( \vec{k}; \overrightarrow{AB} \right)$  :



On choisit le plan horizontal contenant le point  $G_0$  position du centre d'inertie  $G$  de la tige à l'équilibre comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur ( $E_p = 0$ ).

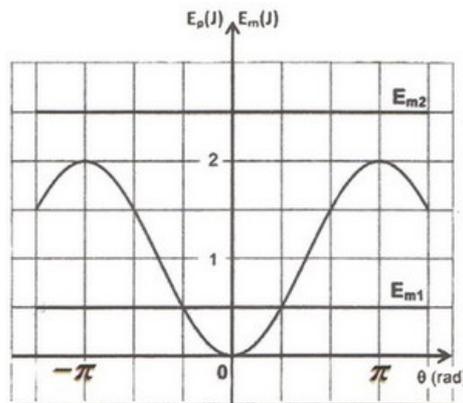
On admet dans le cas de faible amplitude que  $1 - \cos \theta \approx \frac{\theta^2}{2}$  (rad), et on prend  $g = 9,80 \text{ m. s}^{-2}$ .

1. Montrer que l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du pendule pesant peut s'écrire sous la forme :  $E_P = m \cdot g \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos \theta)$ .
2. Dans le cas de faible amplitude, écrire l'expression de l'énergie mécanique à un instant  $t$  en fonction de  $m, l, g, \theta$  et  $\frac{d\theta}{dt}$ .
3. En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse angulaire dans le cas de faible amplitude.

On lance la tige  $AB$  à partir de sa position d'équilibre avec une vitesse initiale. Elle acquiert dans chaque cas une énergie mécanique donnée :

- dans le cas 1 :  $E_m = E_{m1}$
- dans le cas 2 :  $E_m = E_{m2}$

Le diagramme suivant donne l'évolution de l'énergie potentielle  $E_p$  et de l'énergie mécanique  $E_m$  du pendule pesant dans chaque cas :



4. Déterminer à l'aide du diagramme, la nature du mouvement du pendule dans chaque cas.
5. Préciser à partir du diagramme, la valeur maximale de l'abscisse angulaire  $\theta$  du pendule dans le cas 1. En déduire la masse de la tige.

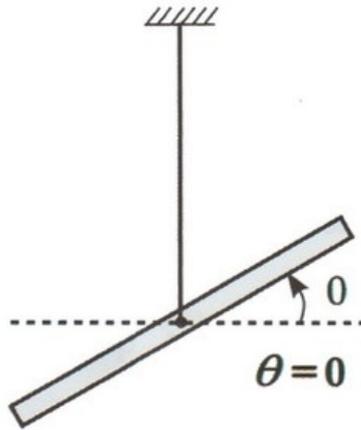
Dans le deuxième cas, l'énergie cinétique du pendule pesant varie entre une valeur minimale  $E_{C_{min}}$  et une valeur maximale  $E_{C_{max}}$ .

6. Trouver les valeurs de  $E_{C_{min}}$  et  $E_{C_{max}}$ .

### 3-2/ Exercice 2

On considère un pendule de torsion constitué d'un fil de torsion et d'une barre homogène de moment d'inertie  $J_\Delta$ .

On écarte la barre de sa position d'équilibre d'un angle  $\theta_m = \frac{\pi}{10} \text{ rad}$  par rapport à la position d'équilibre  $\theta = 0$ , et on la libère sans vitesse initiale à l'instant  $t_0 = 0$  :



Les amortissements sont négligeables.

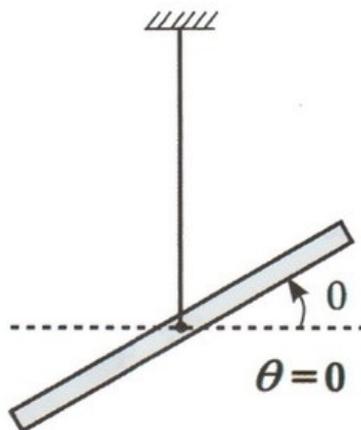
1. Montrer que le mouvement de la barre est un mouvement oscillatoire sinusoïdale.
2. Montrer que  $\dot{\theta}_m = \frac{2\pi}{T_0} \cdot \theta_m$  où  $T_0$  désigne la période propre du mouvement du pendule.
3. Sachant que  $T_0 = 0,2s$ , et la constante de torsion  $C = 1,2N.m.rad^{-1}$ , calculer l'énergie cinétique maximale du pendule de torsion.

### 3-3/ Exercice 3

On étudie le mouvement d'un pendule de torsion dans un repère lié à un référentiel terrestre supposé galiléen.

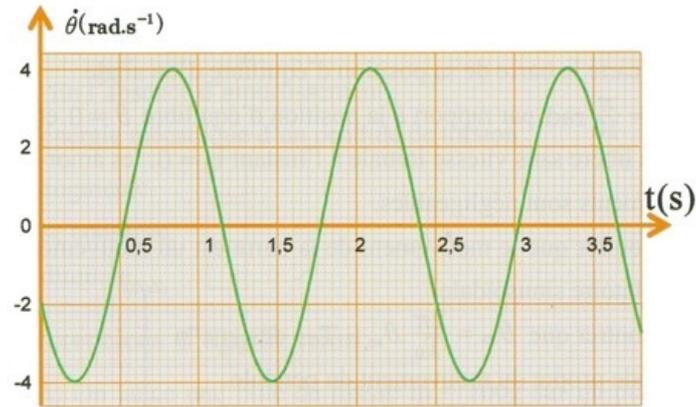
On repère la position de la tige MN à chaque instant par l'abscisse angulaire orientée

$\theta = \left( \overrightarrow{GM_0}; \overrightarrow{GM} \right)$  comme l'indique la figure suivante :



On prend pour état de référence de l'énergie potentielle de torsion  $E_{pt} = 0$  pour  $\theta = 0$ , et on prend  $\pi^2 = 10$ .

Le pendule effectue des oscillations d'amplitude  $\theta_m = \frac{\pi}{4} rad$ . L'étude expérimentale a permis d'obtenir la courbe suivante :



1. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le cas de la rotation, établir l'équation différentielle du mouvement du pendule.

La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme  $\theta(t) = \theta_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$  où  $T_0$  est la période propre du pendule.

2. Montrer que l'expression numérique de la vitesse angulaire s'écrit sous la forme  $\dot{\theta}(t) = 4 \cdot \sin\left(1,6 \cdot \pi \cdot t + \frac{7\pi}{6}\right)$ .
3. Déterminer la valeur de la constante de torsion  $C$ .
4. Déterminer la valeur de l'énergie mécanique de l'oscillateur et en déduire la valeur de son énergie potentielle à l'origine des dates ( $t_0 = 0$ ).