AlloSchool

Physique et Chimie : 2ème Année Bac

Séance 24A (Oscillateurs mécaniques – Pendule élastique)

Professeur : Mr EL GOUFIFA Jihad

Sommaire

I- Systèmes mécaniques oscillants

1-1/ Définition

1-2/ Exemples de quelques oscillateurs mécaniques

1-3/ Caractéristiques des mouvements oscillatoires

1-4/ Amortissement des oscillations

II- Pendule élastique horizontal

2-1/ Équation différentielle du mouvement

2-2/ Équation horaire du mouvement

III- Pendule élastique vertical

IV- Pendule élastique incliné

V- L'amortissement des oscillations

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

I- Systèmes mécaniques oscillants

1-1/ Définition

Un système oscillant, est tout simplement un corps ou plusieurs corps, effectuent un mouvement d'aller-retour autour de son position d'équilibre.

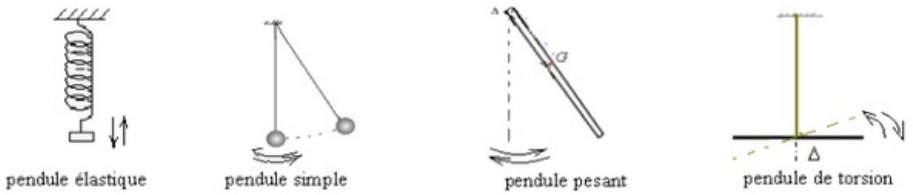
Lors de cette étude, on remarquera une analogie entre les systèmes oscillants (le pendule élastique, de torsion, pesant...) et les circuits (LC, RLC...). On parle des oscillateurs harmoniques.

1-2/ Exemples de quelques oscillateurs mécaniques

- Le pendule élastique : il est constitué d'un corps solide de masse m suspendu à un

ressort à spires non jointives.

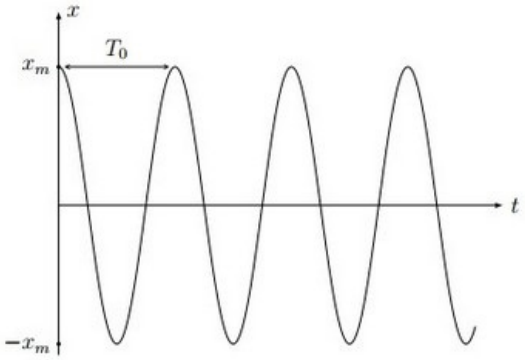
- Le pendule simple : il est constitué d'un corps solide de masse m suspendu à l'extrémité d'un fil inextensible.
- Le pendule pesant : est tout corps solide mobile autour d'un axe ne passant pas par son centre de gravité
- Le pendule de torsion : est constitué d'une barre horizontale, fixée à l'extrémité d'un fil de torsion.



1-3/ Caractéristiques des mouvements oscillatoires

Un mouvement oscillatoire est caractérisé par :

- Sa position d'équilibre stable : C'est la position à laquelle le système tend à y revenir lorsque l'on en éloigne légèrement.
- Sa période propre : C'est le temps mis pour effectuer une oscillation.
- Son amplitude : C'est la valeur maximale positive que prend la grandeur qui exprime le décalage ou l'inclinaison de l'oscillateur de sa position d'équilibre.



1-4/ Amortissement des oscillations

Définition

En écartant un pendule élastique de sa position d'équilibre et en le lâchant, l'amplitude des oscillations diminue jusqu'à ce qu'il s'annule: on dit que le mouvement est amorti. Le phénomène d'amortissement est provoqué par les frottements.

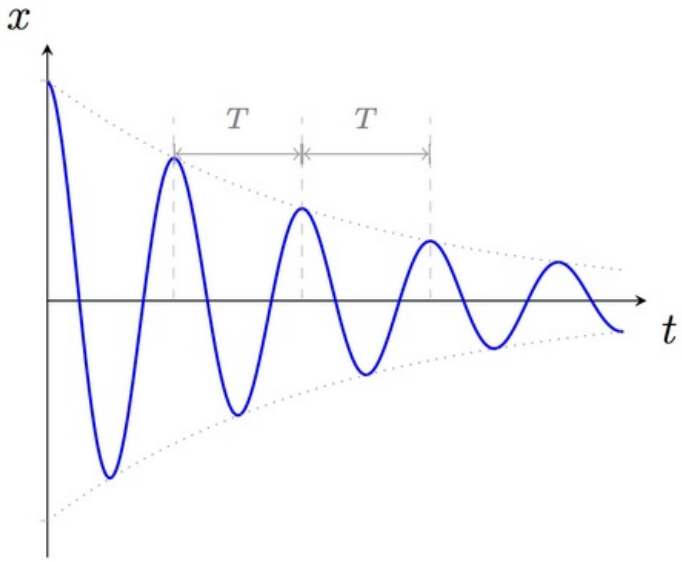
Il existe deux types de frottements :

- Le frottement solide qui se fait entre l'oscillateur et un corps solide.
- Le frottement fluide qui se fait entre l'oscillateur et un corps fluide (liquide ou gaz).

Les régimes d'amortissement

Le régime pseudo périodique :

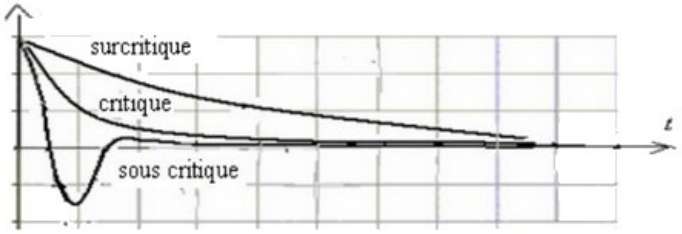
Si l'amortissement est faible, l'amplitude des oscillations diminue progressivement jusqu'à ce qu'il s'annule.



Le régime apériodique :

Si le frottement est fort les oscillations disparaissent et selon l'importance de l'amortissement on distingue trois régimes :

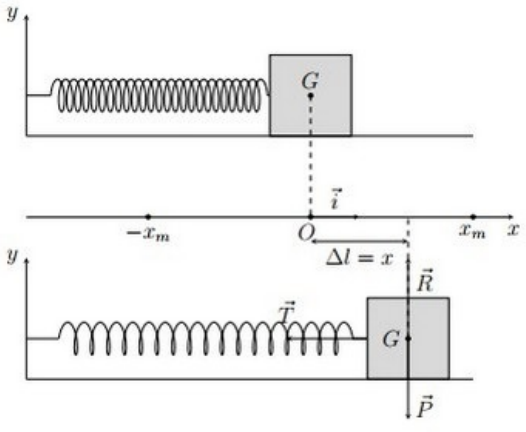
- Le régime sous critique : l'oscillateur effectue une seule oscillation avant de s'arrêter.
- Le régime critique : l'oscillateur revient à sa position d'équilibre sans oscillations.
- Le régime surcritique : l'oscillateur revient à sa position d'équilibre après temps très long sans oscillations.



II- Pendule élastique horizontal

2-1/ Équation différentielle du mouvement

Sur un plan lisse on attache à l'extrémité d'un ressort de spires non jointives et de masse négligeable, un corps (S) de masse m, on l'écarte de sa position d'équilibre, et on le lâche sans vitesse initiale, le solide effectue donc un mouvement rectiligne.oscillatoire.



Bilan des forces :

- $\overrightarrow{P}$: Le poids du corps
- $\overrightarrow{R}$: La réaction du plan
- $\overrightarrow{T}$: La tension du ressort

On applique la deuxième loi de Newton :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{T} = m\overrightarrow{a}$$
$$\Rightarrow -kx = m\ddot{x}$$
$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

C'est l'équation différentielle du mouvement

2-2/ Équation horaire du mouvement

La solution de l'équation différentielle du mouvement $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ est une fonction sinusoïdale qui s'écrit sous la forme :

$$x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- $x(t)$: Abscisse (élongation) du point G et varie entre X_m et $-X_m$
- X_m : Amplitude ou élongation maximale
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: pulsation (rad/s)
- $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{k}}}$: la période propre (s)
- $\omega_0 t + \varphi$: Phase à l'instant t
- φ : Phase à l'origine des temps t=0

II- Pendule élastique vertical

À l'extrémité libre d'un ressort de spires non jointives et de masse négligeable, on attache un corps (S) de masse m.

Dans ce cas il faut faire attention en ce qui concerne l'élongation du ressort, car lors du suspension du corps, le ressort s'allonge d'une distance Δl_0.

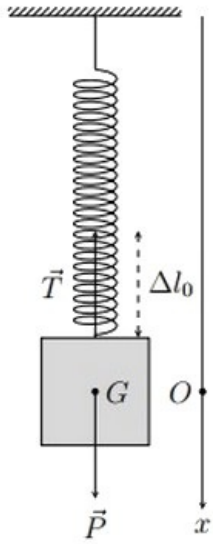
Pour la déterminer on étudie le système en équilibre :

Bilan des forces :

- $\overrightarrow{P}$: Le poids du corps
- $\overrightarrow{T}$: La tension du ressort

On applique la première loi de Newton :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0}$$
$$P - T = 0$$
$$mg = k\Delta l_0$$
$$\Delta l_0 = \frac{mg}{k}$$



III- Pendule élastique vertical

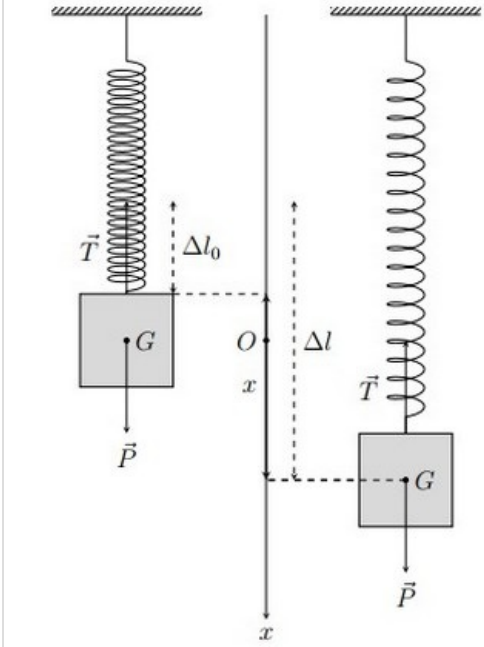
En allongeant le corps (S) vers le bas, il effectue un mouvement oscillatoire, on suppose que l'air n'a aucun effet sur le mouvement de (S) :

Bilan des forces :

- $\overrightarrow{P}$: Le poids du corps
- $\overrightarrow{T}$: La tension du ressort

On applique la deuxième loi de Newton :

$$\overrightarrow{P}+\overrightarrow{T}=m\overrightarrow{a}$$
$$mg-k\Delta l=m\ddot{x}$$
$$mg-k\left(\frac{mg}{k}+x\right)=m\ddot{x}$$
$$m\ddot{x}+kx=0$$
$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

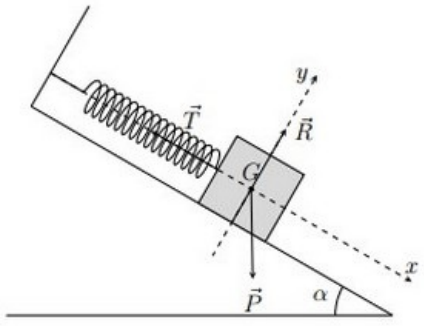


C'est la même équation différentielle obtenue dans la section précédente, sa solution est toujours de la forme :

$$x(t)=X_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)=X_m\cos\left(\omega_0 t+\varphi\right)$$

IV- Pendule élastique incliné

Dans un plan lisse incliné d'un angle α, on attache à l'extrémité d'un ressort de spires non jointives et de masse négligeables, un corps (S) de masse m, le ressort s'allonge donc d'une distance Δl_0, on la détermine en étudiant le système à l'équilibre :



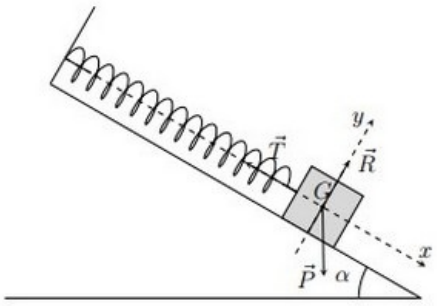
Bilan des forces :

- $\overrightarrow{P}$: Le poids du corps
- $\overrightarrow{T}$: La tension du ressort
- $\overrightarrow{R}$: La réaction du plan

On applique la première loi de Newton :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0}$$
$$P\sin\alpha - T = 0$$
$$P\sin\alpha = T = k\Delta l_0$$
$$\Delta l_0 = \frac{mg\sin\alpha}{k}$$

Maintenant on écarte le corps, et on le lâche sans vitesse initiale, il effectue un mouvement oscillatoire :



Bilan des forces :

- $\overrightarrow{P}$: Le poids du corps
- $\overrightarrow{T}$: La tension du ressort
- $\overrightarrow{R}$: La réaction du plan

On applique la deuxième loi de Newton :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{T} = m\overrightarrow{a}$$
$$P\sin\alpha - T = m\ddot{x}$$
$$mg\sin\alpha - k\Delta l = m\ddot{x}$$
$$mg\sin\alpha - k(\Delta l_0 + x) = m\ddot{x}$$
$$mg\sin\alpha - k\Delta l_0 - kx = m\ddot{x}$$
$$-kx = m\ddot{x}$$
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

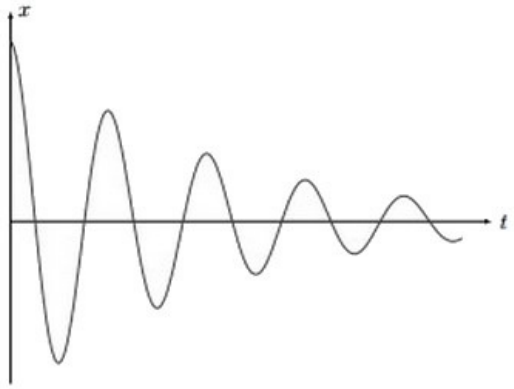
C'est la même équation différentielle obtenue dans la section précédente, sa solution est toujours de la forme :

$$x(t) = X_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

V- L'amortissement des oscillations

En réalité, les frottements ne sont pas négligeables, ceci constitue un obstacle devant le mouvement oscillatoire du corps.

Le corps n'atteint plus $\pm X_m$, sa vitesse et son accélération décroient, et sur l'enregistrement on observe :



VI- Exercices

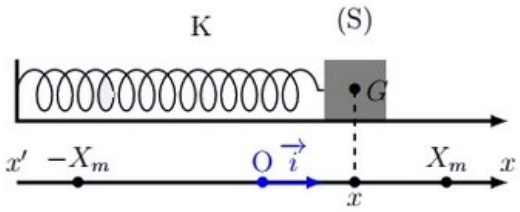
6-1/ Exercice 1

Un oscillateur mécanique élastique est constitué d'un ressort de constante de raideur $K = 10N.m^{-1}$ associé à un solide de masse $m = 250g$.

On écarte le système de sa position d'équilibre de $2cm$ et on l'abandonne sans vitesse initiale.

On considère un axe $\left(O, \vec{i}\right)$, avec O coïncide avec la position du centre d'inertie G du solide à l'équilibre et le vecteur unitaire $\vec{i}$ parallèle au déplacement du solide.

On repère la position G du solide à chaque instant par l'élongation $OG = x(t)$:



1. Montrer que le mouvement du centre d'inertie G du solide obéit, en absence de frottement, à l'équation différentielle suivante : $\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$.

La solution de cette équation différentielle est de la forme $x\left(t\right) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$.

2. Déterminer l'expression de la période propre T_0 des oscillations du pendule élastique et calculer sa valeur.
3. Déterminer les paramètres X_m et φ, sachant qu'à l'instant $t = 0$, G passe par la position d'équilibre du pendule dans le sens positif, écrire cette solution.
4. Déterminer la vitesse des oscillation à l'instant t, en déduire la vitesse maximale du système en précisant sa positions.
5. Déterminer les caractéristiques de la force $\vec{F}$ exercée par le ressort sur le solide dans les deux cas suivant :

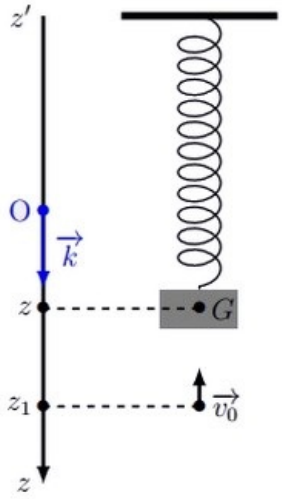
- lorsque le solide passe par sa position d'équilibre stable.
- lorsque $x = X_m$ et $x = -X_m$.

6-2/ Exercice 2

Un pendule élastique vertical est constitué d'un ressort de constante de raideur $K = 10N.m^{-1}$ associé à un solide de masse $m = 300g$.

On écarte le système de sa position d'équilibre de $z_1 = 2cm$, et à l'instant $t = 0$ (origine des dates) on l'abandonne avec une vitesse initiale $v_0 = 0.3m/s$ dans le sens négatif de l'axe $\left(O, \overrightarrow{k}\right)$ orienté vers le bas, et avec O coïncide avec la position du centre d'inertie G du solide à l'équilibre stable et le vecteur unitaire $\overrightarrow{k}$ parallèle au déplacement du solide.

On repère la position G du solide à chaque instant par l'élongation $OG = z(t)$:



1. Montrer que le mouvement du centre d'inertie G du solide obéit, en absence de frottement, à l'équation différentielle suivante : $\ddot{z} + \frac{K}{m}z = 0$

La solution de cette équation différentielle est de la forme : $z\left(t\right) = Z_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$.

2. Déterminer l'expression de la période propre T_0 des oscillations du pendule élastique et calculer sa valeur.
3. Déterminer les paramètres Z_m et φ.

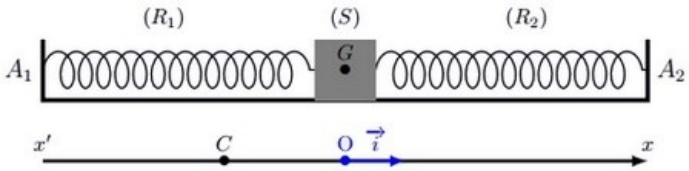
Étudions le cas où on lance le système à $t = 0$, à partir de l'état d'équilibre stable, dans le sens positive avec une vitesse $v_0 = 0,3m/s$.

4. Déterminer les paramètres Z_m et φ.

6-3/ Exercice 3

On place un cavalier de masse $M = 700g$ sur un rail à coussin d'air horizontal et on le fixe aux extrémités de deux ressorts semblables R_1 et R_2 de mêmes constantes de raideur $K_1 = K_2 = 20N/m$.

La longueur initiale de chaque ressort est $l_{01} = l_{02} = 18cm$, et à l'équilibre, ils ont même allongement $\Delta l_1 = \Delta l_2 = 2cm$:



On écarte le cavalier de sa position d'équilibre de distance $OC = 2cm$ de sens vers A_1 et de direction de (A_1A_2), puis on l'abandonne sans vitesse initiale, à l'instant $t = 0$.

1. Déterminer, à un instant t, les expressions des allongements de Δl_1 et Δl_2 pour chaque ressort en fonction de x l'abscisse de G.

2. Déterminer l'équation différentielle du mouvement de G.

La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme suivante $x'(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, avec ω_0 est la pulsation propre du mouvement de G $\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}\right)$.

3. Donner l'expression de ω_0 et T_0.
4. Déterminer φ et X_m.

On fixe au cavalier une petite plaque de masse négligeable puis on l'immerge dans un liquide. La force de frottement appliquée par le liquide sur la plaque au cours du mouvement du cavalier est de la forme $\overrightarrow{f} = -\alpha.\overrightarrow{v}$, où α est une constante positive et $\overrightarrow{v}$ le vecteur vitesse de G.

5. Montrer que l'équation différentielle du mouvement de G peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{2K}{m}x = 0$$

6. Donner la forme des courbes qui représentent l'élongation $x(t)$ du centre d'inertie G lorsque les frottement deviennent de plus en plus importants. (on prend les mêmes conditions initiales)