

Exercice 1 : Suites numériques (4 pts)

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{3-u_n}$ pour tout n de \mathbb{N} .

1. Montrer que pour tout n de \mathbb{N} : $0 < u_n < 1$
- 2)
 - a. Montrer que pour tout n de \mathbb{N} : $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)^2}{3-u_n}$.
 - b. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
- 3) On pose $v_n = \frac{1}{1-u_n}$ pour tout n de \mathbb{N} .
 - a. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme.
 - b. Déterminer v_n en fonction de n et en déduire que $u_n = \frac{n+1}{n+3}$ pour tout n de \mathbb{N} .
 - c. Calculer la limite de la suite (u_n) .
4. A partir de quelle valeur de n , a-t-on $u_n \geq \frac{1011}{1012}$?

Exercice 2 : Nombres complexes (5 pts)

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$.
- 2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = 3 + 2i$, $b = 3 - 2i$ et $c = -1 - 2i$.
 - a. Écrire $\frac{c-b}{a-b}$ sous forme trigonométrique.
 - b. En déduire la nature du triangle ABC .
- 3) Soit R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit M un point du plan d'affixe z et le point M' d'affixe z' l'image de M par R , et soit D le point d'affixe $d = -3 - 4i$.
 - a. Écrire z' en fonction de z .
 - b. Vérifier que C est l'image de A par R .
- 4)

- a. Montrer que les points A , C et D sont alignés.
 - b. Déterminer le rapport de l'homothétie h de centre C et qui transforme A en D .
 - c. Déterminer l'abscisse m du point E pour que le quadrilatère $BCDE$ soit un parallélogramme.
- 5)
- a. Montrer que $\frac{d-a}{m-b}$ est un nombre réel.
 - b. En déduire que le quadrilatère $ABED$ est un trapèze isocèle.

Exercice 3 : Fonctions numériques (3 pts)

On considère la fonction numérique h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = x + \ln x$

1. Montrer que la fonction h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
 2. Déterminer $h(]0; +\infty[)$.
- 3)
- a. En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$.
 - b. Montrer que $0 < \alpha < 1$.
- 4)
- a. Vérifier que $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$.
 - b. En déduire que $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) > 2$.

Problème : Étude de fonctions numériques et calcul intégral (8 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2 - xe^{-x+1}$.

Soit (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

(unité : $1cm$)

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.
- 2)
- a. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.
- 3)
- a. Montrer que pour tout x de \mathbb{R} : $f'(x) = (x - 1)e^{-x+1}$
 - b. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 4)
- a. Calculer $f''(x)$ pour tout x de \mathbb{R} .

b. Montrer que la courbe (\mathcal{C}) admet un point d'inflexion d'abscisse 2.

5. Construire la courbe (\mathcal{C}) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (On prend $f(2) \simeq 1,25$).

6. Déterminer la valeur minimale de la fonction f et en déduire que pour tout x de $\mathbb{R} : e^{x-1} \geq x$.

7)

a. En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_0^2 x e^{-x} dx$.

b. En déduire que $\int_0^2 f(x) dx = 4 - e + 3e^{-1}$.

8) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 1]$.

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b. Construire la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

c. A partir de la courbe représentative de g^{-1} , déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g^{-1}(x)}{x} \right)$.