AlloSchool

Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

Examen National 2019 Session Rattrapage

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Exercice 1 (4,5 pts)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n-9}{u_n-5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n < 3$

3)

a. Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-3)^2}{5-u_n}$

b. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

5) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{-2u_n+4}{u_n-3}$

a. Vérifier que $v_0 = -1$.

b. Montrer que $v_{n+1} = \frac{-u_n+1}{u_n-3}$.

c. En déduire que (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.

6)

a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{3v_n+4}{v_n+2}$

b. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{3n+1}{n+1}$

c. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

Exercice 2 (4 pts)

(Les résultats seront donnés sous forme de fraction)

Un sac S_1 contient deux boules blanches, une boule rouge et trois boules vertes.

Un autre sac S_2 contient une boule blanche, deux boules rouges et une boule verte.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On considère l'expérience suivante : « on tire une boule du sac S_1 puis on tire une boule du sac S_2 »

On considère les événements suivants :

A : « Les deux boules tirées sont blanches »
B : « Les deux boules tirées sont de couleurs différentes »

1. Montrer que $p(A) = \frac{1}{12}$.
2. Montrer que $p\left(\overline{B}\right) = \frac{7}{24}$ ($\overline{B}$ est l'événement contraire de B), et en déduire $p(B)$.
3. Calculer $p(A \cup B)$.

Exercice 3 (11,5 pts)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = (1 - \ln x)\ln x$

Et soit $\left(\mathscr{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, et interpréter géométriquement le résultat.

2)

a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$, Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.

3)

a. Montrer que, pour tout x de $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{1}{x}(1 - 2\ln x)$.

b. Montrer que f est croissante sur $\left]0; \sqrt{e}\right]$, et qu'elle est décroissante sur $\left[\sqrt{e}; +\infty\right[$.

c. Calculer $f\left(\sqrt{e}\right)$ puis dresser le tableau de variations de f.

d. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et en déduire les coordonnées des points d'intersection de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ avec l'axe des abscisses.

e. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au point d'abscisse $x_0 = 1$.

4)

a. Montrer que $f''(x) = \frac{1}{x^2}(2\ln x - 3)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

b. Montrer que $A\left(e^{\frac{3}{2}}; \frac{-3}{4}\right)$ est un point d'inflexion de $\left(\mathscr{C}_f\right)$.

5) Dans la figure ci-dessous $\left(\mathscr{C}_f\right)$ est la courbe représentative de f, et soit F la fonction définie par $F(x) = -x(\ln x)^2 + 3x\ln x - 3x$.

a. Montrer que F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

b. A partir de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ ci-dessous, donner les variations de F sur $]0;+\infty[$.

c. Calculer l’aire de la partie hachurée.