Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

Examen National 2019 Session Normale

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Exercice 1 (4 pts)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{7}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2)

a. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n - \frac{2}{7} \geq 0$

b. Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{7}\right)$, et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

4) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - \frac{2}{7}$

a. Calculer v_0.

b. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{12}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{7}$

5. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

Exercice 2 (4 pts)

(Donner les résultats sous forme de fraction)

Une urne contient trois boules rouges et cinq boules vertes. Les boules sont indiscernables au toucher.

On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

A : « Les deux boules tirées sont rouges »
B : « La première boule tirée est rouge »
C : « La deuxième boule tirée est verte »

1. Montrer que $p(A) = \frac{6}{56}$ et $p(B) = \frac{21}{56}$.

2. Calculer $p(C)$.

3. Calculer $p(B \cap C)$.

4. Les événements B et C sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

Exercice 3 (12 pts)

Partie I

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

2)

a. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer $g(0)$ et dresser le tableau de variations de g (le calcul des limites aux bornes n'est pas demandé)

c. En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$: $g(x) \geq 1$

Partie II

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = (x+1)e^{-x} + (x-1)$.
Et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$.

1)

a. Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b. Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

2)

a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x-1))$.

b. Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

3)

a. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$

b. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c. Dresser le tableau de variations de f.

d. Donner l'équation de la tangente (Γ) au point d'abscisse 0.

e. Résoudre l'équation $f(x) = x - 1$ et en déduire les coordonnées du point d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et de la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$.

4)

a. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f''(x) = e^{-x}(x-1)$

b. Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

5) Dans la figure ci- dessous $(\mathscr{C}_f)$ est la courbe représentative de f dans le repère $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$.

a. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_{-1}^{1} (x+1)e^{-x}\,\mathrm{d}\,x = e - \frac{3}{e}$

b. Calculer l'aire de la partie hachurée de la figure .