Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

Séance 13 (Calcul de probabilités)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Expériences aléatoires – Probabilité d’un évènement

1-1/ Expériences aléatoires

Si on lance une pièce de monnaie, on ne peut pas prévoir le résultat. On dit que le lancer d’une pièce de monnaie est une expérience aléatoire.

Chaque résultat d'une expérience aléatoire est dit éventualité.

L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est dit l'univers des éventualités (ou simplement l'univers), et noté généralement Ω (pour le lancer d'une pièce de monnaie, on a : $\Omega = \{P; F\}$).

Chaque sous-ensemble de l'univers Ω (formé d'une ou plusieurs éventualités) est appelé un événement (obtenir le coté P est un événement, on écrit $A = \{P\}$).

Un événement élémentaire est un événement formé d'une seule éventualité.

L'intersection $A \cap B$ de deux événements A et B est l'événement $''A$ et B“ formé des éventualités communes à A et B.

L'union $A \cup B$ de deux événements A et B est l'événement $''A$ ou B' formé des éventualités de l'un au moins des événements A et B.

L'événement contraire d'un événement A noté $\overline{A}$ est l'événement constitué des résultats de l'univers Ω qui ne sont pas dans A ($\overline{A}$ se réalise si et seulement si A ne réalise pas).

L'événement impossible $\emptyset$ est l'événement qui ne contient aucune éventualité (il est impossible à réaliser).

L'événement certain Ω (se réalise toujours).

1-2/ Stabilité de la fréquence d'un événement – Probabilité d'un événement

Définition

Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.

Lorsque la fréquence d'un événement élémentaire $\{\omega_i\}$ se stabilise à une valeur p_i, on dit que la probabilité d'événement $\{\omega_i\}$ est p_i, et on écrit $P\left(\{\omega_i\}\right) = p_i$.

Pour tout événement $\{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_i\}$ de Ω, la probabilité A est la somme des probabilités des éventualités qui le composent :

$$P\left(A\right) = P\left(\{\omega_1\}\right) + P\left(\{\omega_2\}\right) + \ldots + P\left(\{\omega_,\}\right) = p_1 + p_2 + \ldots + p_i$$

I- Expériences aléatoires-Probabilité d'un évènement

Propriété

Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.

$\forall A \in \Omega\ ;\ 0 \leq p\left(A\right) \leq 1$

$p\left(\Omega\right) = 1\ et\ p\left(\emptyset\right) = 0$

$p\left(\overline{A}\right) = 1 - p\left(A\right)$

Si A et B sont deux événements de Ω, on a $p\left(A \cup B\right) = p\left(A\right) + p\left(B\right) - p\left(A \cap B\right)$.

Si A et B sont deux événements incompatibles de Ω, on a $A \cap B = \emptyset$, et donc $p\left(A \cup B\right) = p\left(A\right) + p\left(B\right)$.

I- Expériences aléatoires – Probabilité d'un évènement

1-3/ Hypothèse d'équiprobabilité

Définition

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit que l'hypothèse d'équiprobabilité est réalisée.

Propriété

Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, la probabilité de l'événement A de Ω est :

$$P\left(A\right)=\frac{nombre\ éléments\ A}{nombre\ éléments\ \Omega}=\frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Exemple

II- Probabilité conditionnelle

2-1/ Probabilité conditionnelle

Définition

Soient A et B deux événements associés à une même expérience aléatoire tes que $P\left(A\right)\neq 0$.

La probabilité de l'événement B sachant que de l'événement A est réalisé est le nombre noté $P_A\left(B\right)$ ou $P\left(B/A\right)$ défini par : $P_A\left(B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

Propriété

Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.

- Si A et B deux événements de Ω tels que $P\left(A\right)\neq 0$ et $P\left(B\right)\neq 0$, alors $P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\times P_A\left(B\right)$ et $P\left(A\cap B\right)=P\left(B\right)\times P_B\left(A\right)$.

.

On a $P\left(B\right)=P\left(B\cap A\right)+P\left(B\cap\overline{A}\right)$, donc

$P\left(B\right)=P\left(A\right)\times P_A\left(B\right)+P\left(\overline{A}\right)\times P_{\overline{A}}\left(B\right)$: Cette relation est appelée loi des probabilités totales.

2-2/ Indépendance de deux événements

Définition

Soient A et B deux événements associés à une même expérience aléatoire.

On dit que les événements A et B sont indépendants si $P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\times P\left(B\right)$.

Exemple

Propriété

Soient A et B deux événements associés à une même expérience aléatoire tel que $P\left(A\right)\neq 0$.

Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P_{A}\left(B\right)=P\left(B\right)\Leftrightarrow P_{B}\left(A\right)=P\left(A\right)$.

Dire que les événements A et B sont indépendants signifie que la réalisation de l'un n'influe par sur celle de l'autre.

III- Indépendance de deux épreuves

3-1/ exemple

On considère deux urnes U_1 et U_2.

L'urne U_1 contient 7 boules : 3 blanches et 4 rouges.

L'urneU_2 contient 10 boules : 6 blanches et 4 rouges.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire une boule de l'urne U_1, et une boule de l'urne U_2.

On considère l'événement E «obtenir 1 boule blanche de l'urne U_1, et 1 boule rouge de l'urne U_2».

Cette expérience est formée de deux épreuves, l'une consiste à tirer une boule de l'urne U_1 et l'autre à tirer une boule de l'urne U_2.

Le résultat d'une épreuve est indépendant du résultat de l'autre.

On dit dans ce cas que cette expérience est formée de deux épreuves indépendantes.

On considère les événements suivants :

- E_1 «obtenir 1 boule blanche de l'urne U_1».
- E_2 «obtenir 1 boule rouge de l'urne U_2».

La probabilité de l'événement E est le produit des probabilités des événements E_1 et E_2.

$$\begin{cases} P\left(E_1\right)=\frac{3}{7} \\ P\left(E_2\right)=\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow P\left(E\right)=\frac{6}{35}$$

3-2/ Épreuves répétées

Propriété

Soit A un événement associé à une expérience aléatoire de probabilité p.

La probabilité de réaliser exactement k fois l'événement A est $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ pour tout $k\in\{0,1,2,\ldots,n\}$ où n est le nombre de répétitions de l'épreuve dans les mêmes conditions.

Exemple

Si on lance une pièce de monnaie 5 fois de suite, alors la probabilité de l'événement A «obtenir le coté F_2 fois exactement» est
$P\left(A\right) = C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-2}$.

IV- Variables aléatoires

4-1/ Variable aléatoire – Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

Toute fonction définie sur l'univers Ω à valeur dans $\mathbb{R}$ est appelée variable aléatoire, notée X ou Y ou Z ....

Les valeurs prises par la variable aléatoire X notées $X\left(\Omega\right)$.

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω associé à une expérience aléatoire telle que $X\left(\Omega\right) = \{x_1, x_2, \ldots., x_2\}$.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, c'est calculer la probabilité de chacun des événements $\{X = x_i\}$ où $i \in \{1, 2, \ldots., n\}$

On résume souvent la loi de probabilité de la variable aléatoire X par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2		x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2		p_n

Exemple

4-2/ Espérance mathématique – Variance et écart-type

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω associé à une expérience aléatoire.

On note $X\left(\Omega\right) = \{x_1, x_2, \ldots., x_2\}$ et $P\left(X = x_i\right) = p_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots., n\}$.

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le nombre réel noté $E\left(X\right)$ définie par $E\left(X\right) = \sum\limits_1^n x_i p_i$.

La variance de la variable aléatoire X est le nombre réel noté $V\left(X\right)$ définie par $V\left(X\right) = \sum_1^n \left(x_i - E\left(X\right)\right)^2 p_i = E\left(X^2\right) - \left(E\left(X\right)\right)^2$.

L'écart-type de la variable aléatoire X est le nombre réel positif noté $\sigma\left(X\right)$ définie par $\sigma\left(X\right) = \sqrt{V\left(X\right)}$.

Exemple

4-3/ Loi binomiale

Définition

On considère une expérience aléatoire formée d'une répétition n fois de manière indépendante d'une même épreuve à deux issues : A succès de probabilité p, et $\overline{A}$ échec de probabilité $q = 1 - p$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que le succès se réalise au cours de cette expérience.

On dit que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, notée $X \to B\left(n; p\right)$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binomiale de paramètres n et p.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.

On a :

Les valeurs prise par la variable aléatoire X sont : $X\left(\Omega\right) = \left\{0, 1, 2, \ldots., n\right\}$

$\left(\forall k \in \left\{0, 1, 2, \ldots., n\right\}\right) \ : \ P\left(X = k\right) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est : $E\left(X\right) = np$.

La variance de la variable aléatoire X est :
$V\left(X\right) = npq = np\left(1 - p\right) = E\left(X\right).\left(1 - p\right)$.

L'écart-type de la variable aléatoire X est : $\sigma\left(X\right) = \sqrt{V\left(X\right)} = \sqrt{np\left(1-p\right)}$.

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie. On considère les événements suivants : A «obtenir exactement une fois le coté F»

et B «obtenir au plus une fois le coté P»

1. *A l'aide de l'arbre des issues, déterminer l'univers des éventualités .*
2. *Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants : A ; B ;* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$
3. *Que peut-on conclure sur les événements : A et B?*

5-2/ Exercice 2

I. *Une urne contient 10 boules : 3 jaunes, 2 vertes et 5 rouges. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.*

On tire au hasard successivement et sans remise 3 boules de l'urne.

1. *Déterminer le nombre de tirages possibles.*
2. *Déterminer la probabilité de chacun des événements :*

A *«obtenir* 3 *boules rouges».*

B *«obtenir* 3 *boules jaunes».*

C *«obtenir* 3 *boules de même couleur»*

D «obtenir 2 boules jaunes et 1 boule verte».

E *«obtenir 1 boule de chaque couleur».*

F *«obtenir au moins 1 boule jaune».*

G *«obtenir exactement 2 couleurs».*

3 On tire au hasard successivement et avec remise boules de l'urne.Répondre aux questions précédentes

5-3/ Exercice 3

a. *Une urne contient 9 boules : 5 blanches et 4 noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.*

On tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urne

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

1. *Déterminer les valeurs prise par la variable aléatoire .*
2. *Déterminer la loi de probabilité de variable aléatoire .*
3. *Calculer l'espérance mathématique E(X), la variance V(X)et l'écart-type* $\sigma\left(X\right)$