

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 2, 2)$, $B(3, -1, 6)$ et $C(1, 1, 3)$.

1)

a. Montrer que $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$

b. En déduire que $x - 2y - 2z + 7 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

Soient les points $E(5, 1, 4)$ et $F(-1, 1, 12)$ et (S) l'ensemble des points M vérifiant $\vec{ME} \cdot \vec{MF} = 0$.

2. Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(2, 1, 8)$ et de rayon $R = 5$.

3)

a. Calculer $d(\Omega, (ABC))$ la distance du point Ω au plan (ABC) .

b. En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $r = 4$.

Exercice 2 : Nombres complexes (3 pts)

1)

a. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.

b. On pose $a = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, écrire a sous forme trigonométrique.

2. On considère le nombre complexe $b = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, vérifier que $b^2 = i$.

3. On pose $h = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$, montrer que $h^4 + 1 = a$.

4) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère le point B d'affixe b et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Soit c l'affixe du point C image du point B par la rotation R . Montrer que $c = ib$

b. En déduire la nature du triangle OBC .

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 pts)

Une urne contient 1 boule rouge, 2 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.

On tire au hasard successivement et avec remise 3 boules de l'urne.

Soient les événements suivants :

- A : "Les trois boules tirées sont de même couleur".
- B : "Il n' y a aucune boule blanche parmi les boules tirées".
- C : "Il y a exactement deux boules blanches parmi les boules tirées".

1. Montrer que $p(A) = \frac{1}{6}$ et $p(B) = \frac{8}{27}$.

2. Calculer $p(C)$.

Problème : Étude de fonctions numériques, calcul intégral et suites numériques (11 pts)

Partie 1

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = 2 + 8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$.

Soit (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité : 1cm).

1)

a. Vérifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ et interpréter le résultat géométriquement.

b. Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

2)

a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b. Montrer que la courbe (\mathcal{C}) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3)

a. Montrer que $f'(x) = \frac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$ pour tout x de \mathbb{R}^* .

b. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R} : x^2 - 2x + 4 > 0$.

c. Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]0, 2]$ et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $[2, +\infty[$.

d. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur \mathbb{R}^* .

4. Construire la courbe (\mathcal{C}) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

5)

a. Vérifier que la fonction $H : x \mapsto \frac{1}{x} e^{x-4}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \frac{x-1}{x^2} e^{x-4}$ sur $[2, 4]$.

b. Vérifier que $f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32\frac{(x-1)}{x^2}e^{x-4}$ pour tout x de \mathbb{R}^* .

c. Calculer l'intégrale $\int_2^4 e^{x-4} dx$

d. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (\mathcal{C}) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

Partie 2

- 1) On considère la fonction numérique g définie sur $[2, 4]$ par $g(x) = 8(x - 2)e^{x-4} - x^2$.
- Calculer $g(4)$.
 - Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2, 4]$: $g(x) = -(x - 4)^2 e^{x-4} + x^2 (e^{x-4} - 1)$.
 - Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2, 4]$: $e^{x-4} - 1 \leq 0$, puis en déduire que pour tout x de l'intervalle $[2, 4]$: $g(x) \leq 0$.
- 2)
- Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2, 4]$: $f(x) - x = \left(\frac{x-2}{x^2}\right)g(x)$
 - En déduire que pour tout x de l'intervalle $[2, 4]$: $f(x) \leq x$
- 3) Soit (u_n) la suite numérique définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Déterminer la monotonie de la suite (u_n) et en déduire qu'elle est convergente
 - Calculer la limite de la suite (u_n) .