

### Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(1, 2, 2)$ ,  $B(3, -1, 6)$  et  $C(1, 1, 3)$ .

1)

a. Montrer que  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$

b. En déduire que  $x - 2y - 2z + 7 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .

Soient les points  $E(5, 1, 4)$  et  $F(-1, 1, 12)$  et  $(S)$  l'ensemble des points  $M$  vérifiant  $\vec{ME} \cdot \vec{MF} = 0$ .

2. Montrer que  $(S)$  est la sphère de centre  $\Omega(2, 1, 8)$  et de rayon  $R = 5$ .

3)

a. Calculer  $d(\Omega, (ABC))$  la distance du point  $\Omega$  au plan  $(ABC)$ .

b. En déduire que le plan  $(ABC)$  coupe la sphère  $(S)$  selon un cercle  $(\Gamma)$  de rayon  $r = 4$ .

### Exercice 2 : Nombres complexes (3 pts)

1)

a. Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation  $z^2 - 3z + 3 = 0$ .

b. On pose  $a = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , écrire  $a$  sous forme trigonométrique.

2. On considère le nombre complexe  $b = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ , vérifier que  $b^2 = i$ .

3. On pose  $h = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$ , montrer que  $h^4 + 1 = a$ .

4) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère le point  $B$  d'affixe  $b$  et  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

a. Soit  $c$  l'affixe du point  $C$  image du point  $B$  par la rotation  $R$ . Montrer que  $c = ib$

b. En déduire la nature du triangle  $OBC$ .

### Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 pts)

Une urne contient 1 boule rouge, 2 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.

On tire au hasard successivement et avec remise 3 boules de l'urne.

Soient les événements suivants :

- A : "Les trois boules tirées sont de même couleur".
- B : "Il n'y a aucune boule blanche parmi les boules tirées".
- C : "Il y a exactement deux boules blanches parmi les boules tirées".

1. Montrer que  $p(A) = \frac{1}{6}$  et  $p(B) = \frac{8}{27}$ .
2. Calculer  $p(C)$ .

### Problème : Étude de fonctions numériques, calcul intégral et suites numériques (11 pts)

#### Partie 1

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = 2 + 8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$ .

Soit  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(unité : 1cm).

1)

- a. Vérifier que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$  et interpréter le résultat géométriquement.
- b. Vérifier que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  et interpréter le résultat géométriquement.

2)

- a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- b. Montrer que la courbe  $(\mathcal{C})$  admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de  $+\infty$ .

3)

- a. Montrer que  $f'(x) = \frac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^*$ .
- b. Vérifier que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $x^2 - 2x + 4 > 0$ .
- c. Montrer que la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $]0, 2]$  et strictement croissante sur chacun des intervalles  $] -\infty, 0[$  et  $[2, +\infty[$ .
- d. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

4. Construire la courbe  $(\mathcal{C})$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

5)

- a. Vérifier que la fonction  $H : x \mapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$  est une fonction primitive de la fonction  $h : x \mapsto \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$  sur  $[2, 4]$ .
- b. Vérifier que  $f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32\frac{(x-1)}{x^2}e^{x-4}$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^*$ .
- c. Calculer l'intégrale  $\int_2^4 e^{x-4} dx$
- d. Calculer en  $cm^2$  l'aire du domaine plan limité par  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 2$  et  $x = 4$ .

## Partie 2

1) On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $[2, 4]$  par

$$g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2.$$

- a. Calculer  $g(4)$ .
- b. Vérifier que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[2, 4]$  :  
$$g(x) = -(x-4)^2 e^{x-4} + x^2 (e^{x-4} - 1).$$
- c. Vérifier que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[2, 4]$  :  $e^{x-4} - 1 \leq 0$ , puis en déduire que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[2, 4]$  :  $g(x) \leq 0$ .

2)

- a. Vérifier que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[2, 4]$  :  $f(x) - x = \left(\frac{x-2}{x^2}\right)g(x)$
- b. En déduire que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[2, 4]$  :  $f(x) \leq x$

3) Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- a. Montrer par récurrence que  $2 \leq u_n \leq 4$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- b. Déterminer la monotonie de la suite  $(u_n)$  et en déduire qu'elle est convergente
- c. Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .