# Mathématiques : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

## Examen National 2019 Session Normale

**Professeur : Mr CHEDDADI Haitam**

## Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1,-1,-1)$, $B(0,-2,1)$ et $C(1,-2,0)$.

1)

a. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

b. En déduire que $x+y+z+1=0$ est une équation cartésienne du plan $(ABC)$.

Soit $(S)$ la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$

2. Montrer que le centre de la sphère $(S)$ est $\Omega(2,-1,1)$ et que son rayon est $R=\sqrt{5}$.

3)

a. Calculer $d(\Omega,(ABC))$ la distance du point $\Omega$ au plan $(ABC)$.

b. En déduire que le plan $(ABC)$ oupe la sphère $(S)$ selon un cercle $(\Gamma)$ (la détermination du centre et du rayon de $(\Gamma)$ n'est pas demandée).

## Exercice 2 : Nombres complexes (3 pts)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2-2z+4=0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives $a=1-i\sqrt{3}$, $b=2+2i$, $c=\sqrt{3}+i$ et $d=-2+2\sqrt{3}$.

a. Vérifier que $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$.

b. En déduire que les points $A$, $C$ et $D$ sont alignés.

On considère $z$ l'affixe d'un point $M$ et $z$' l'affixe de $M$' image de $M$ par la rotation $R$ de centre $O$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

3. Vérifier que $z' = \frac{1}{2}az$

4) Soient $H$ l'image du point $B$ par la rotation $R$, $h$ son affixe et $P$ le point d'affixe $p$ tel que $p=a-c$.

a. Vérifier que $h=ip$.

b. Montrer que le triangle $OHP$ est rectangle et isocèle en $O$.

## Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 pts)

Une urne contient 10 boules: 3 boules vertes, 6 boules rouges et 1 boule noire indiscernables au toucher.

On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

- A : « Obtenir 3 boules vertes».
- B : « Obtenir 3 boules de même couleur».
- C : « Obtenir au moins 2 boules de même couleur».

1. Montrer que $p(A) = \frac{1}{120}$ et $p(B) = \frac{7}{40}$.
2. Calculer $p(C)$.

# Problème : Étude de fonctions numériques, calcul intégral et suites numériques (11 pts)

## Partie 1

Soit la fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par $f\left(x\right) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

Soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : $1cm$)

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

2)

a. Vérifier que pour tout $x$ de $]0;+\infty[$ : $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x$.

b. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c. Montrer que pour tout $x$ de $]0;+\infty[$ : $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$, puis en déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$.

d. Montrer que $(\mathscr{C})$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite $(\Delta)$ d'équation $y = x$.

3)

a. Montrer que pour tout $x$ de $]0;1]$ : $(x-1) + \ln x \leq 0$, et que pour tout $x$ de $[1;+\infty[$ : $(x-1) + \ln x \geq 0$.

b. Montrer que pour tout $x$ de $]0;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

4)

a. Montrer que $f''(x) = \frac{2-\ln x}{x^2}$ pour tout $x$ de $]0;+\infty[$.

b. En déduire que $(\mathscr{C})$ admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

5)

a. Montrer que pour tout $x$ de $]0;+\infty[$ : $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$, et déduire la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\Delta)$.

b. Construir $(\mathscr{C})$ et $(\Delta)$ dans le même repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

6)

a. Montrer que la fonction $H : x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur $]0;+\infty[$.

b. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e (\ln x)^2 \,\mathrm{d}\,x = e - 2$.

c. Calculer en $cm^2$ l'aire du domaine plan limité par $(\mathscr{C})$ et $(\Delta)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

## Partie 2

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1)

a. Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

c. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

2. Calculer la limite de la suite $(u_n)$