Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

Examen National 2021 Session Normale

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Exercice 1 (5 pts)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n < -\frac{3}{4}$.

3)

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}\left(u_n + \frac{3}{4}\right)$.

b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

4) Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

5) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + \frac{3}{4}$.

a) Calculer v_0.

b) Montrer que (v_n) est une de suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

c) Donner v_n en fonction de n.

d) En déduire que pour tout tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = -\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right]$.

6) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 2 (5,5 pts)

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :
$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln(x)$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2)

a) Montrer que : $\forall x > 0\ ;\ g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}$

b) Donner le signe de $g'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

3)

a) Calculer $g\left(\frac{1}{e}\right)$ et $g(1)$ puis dresser le tableau de variations de g.

b) A partir du tableau de variations de g, donner le signe de $g(x)$ sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$.

c) A l'aide du tableau de variations, résoudre l'inéquation : $1 + e^2 + \ln x \geq \frac{1}{x^2}$

Exercice 3 (5,5 pts)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :
$f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2)

a) Montrer que : $\forall x > 0$; $f'(x) = \frac{1}{x}(2\ln x - 1)$

b) Montrer que $f'(x) \leq 0$ sur $\left]0; \sqrt{e}\right]$ et $f'(x) \geq 0$ sur $\left[\sqrt{e}; +\infty\right[$

c) Calculer $f\left(\sqrt{e}\right)$ et $f(e)$ puis dresser le tableau de variations de f.

3) A partir du tableau de variations de f :

a) Donner la valeur minimale de f sur $]0; +\infty[$.

b) Déterminer l'image de l'intervalle $\left[\sqrt{e}; e\right]$ par f.

Exercice 4 (4 pts)

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1) Calculer les limites suivantes :

$$A \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{e^x}{e^x - 1}\right)$$

$$B \quad \lim_{x \to -\infty} \left(2x + \frac{e^x}{e^x - 1}\right)$$

$$C \quad \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{x^2}\right)$$

2)

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $t^2 + t - 2 = 0$

b) En déduire dans $\mathbb{R}$ les solutions de l'équation suivante : $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

3) Donner une primitive H de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = e^x + \frac{2\ln x}{x}$
