Mathématiques : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

Examen National 2021 Session Normale

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Exercice 1 : Fonctions numériques (2 pts)

1)

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0$

c. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1}$

2. Montrer que l'équation $e^{2x} + e^x + 4x = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[-1; 0]$

Exercice 2 : Suites numériques (4 pts)

Soit (u_n) la suite numérique définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

3)

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

b. En déduire la monotonie de la suite (u_n)

4)

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$; puis calculer la limite de la suite (u_n)

b. On pose $v_n = \ln(3 - 2u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $lim\,(v_n)$

5)

a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$

b. En déduire u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 : Nombres complexes (5 pts)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$.

2) Soient les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a. Écrire a sous forme algébrique.

b. Vérifier que $\overline{a}\,b = \sqrt{3}$.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $\overline{a}$.

3. Montrer que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport.

4) Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Écrire z' en fonction de z et a.

b. Soit d l'affixe du point D image de C par la rotation R, montrer que $d = a + 1$.

c. Soit I le point d'affixe le nombre 1, montrer que $ADIO$ est un losange.

5)

a. Vérifier que $d - b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1 - i)$; en déduire un argument du nombre $d - b$.

b. Écrire le nombre $1 - b$ sous forme trigonométrique.

c. Déduire une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}}\right)$.

Problème : Étude de fonctions numériques et calcul intégral (9 pts)

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(0) = 0$ et $f(x) = 2x \ln x - 2x$ si $x > 0$.

Soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ (unité : $1cm$)

1. Montrer que f est continue à droite au point 0.

2)

a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.

3)

a. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.

b. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

4)

a. Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$ les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = x$.

b. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ (on prend $e^{\frac{3}{2}} \simeq 4,5$)

5)

a. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^e x \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{1+e^2}{4}$.

b. En déduire $\int_1^e f(x) \, \mathrm{d}x$.

6)

a. Déterminer le minimum de f sur $]0; +\infty[$.

b. En déduire que pour tout x de $]0; +\infty[$, on a $\ln x \geq \frac{x-1}{x}$.

7) Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1; +\infty[$.

a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b. Construire dans le même repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ la courbe représentative de la fonction g^{-1}.

8) on considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} h(x) = x^3 + 3x \ \ (x \leq 0) \\ h(x) = 2x \ln x - 2x \ \ (x > 0) \end{cases}$

a. Étudier la continuité de h au point 0.

b. Étudier la dérivabilité de la fonction h à gauche au point 0 puis interpréter géométriquement le résultat.

c. La fonction h est-elle dérivable au point 0 ? Justifier.