AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

Semestre 2 Devoir 2 Modèle 1

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Exercice 1 (5 pts)

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ les points $A(3,0,2)$ et $B(5,-1,1)$ et $C(0,2,3)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-25=0$

1. Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,0,1)$ et que son rayon est $R=3\sqrt{3}$
2. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, et que $x+y+z-5=0$ est une équation cartésienne Du plan (ABC)
3. Vérifier que $d\left(\Omega,(ABC)\right)=\sqrt{3}$ puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) en un cercle (Γ) de rayon $r=2\sqrt{6}$

Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et est perpendiculaire au plan (ABC)

4. Montrer que $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ)
5. Montrer que $H(2,1,2)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (ABC)
6. Déduire le centre du cercle (Γ)

Exercice 2 (5 pts)

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexe $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-6z+25=0$

On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ les points A, B et C d'affixes respectivement $a=3-4i$, $b=1-i$ et $c=-1+2i$

2. Calculer $\frac{a-c}{b-c}$ et déduire que les points A, B et C sont alignés

On considère la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-5+i$

3. Vérifier que l'affixe du point D image du point C par la translation T est $d=-6+3i$

4. Montrer que $\frac{d-c}{b-c}=-1-i$, et que $-\frac{3\pi}{4}$ est l'argument du nombre complexe $-1-i$
5. Déduire une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right)$

Exercice 3 (10 pts)

Partie 1

Soit g la fonction numérique de variable x définie sur $]0,+\infty[$ par
$g\left(x\right)=2\ln\left(x\right)+1+\frac{3}{x^2}$

1. Montrer que $g'\left(x\right)=\frac{2\left(x^2-3\right)}{x^3}$ pour tout x de $]0,+\infty[$
2. Montrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{3},+\infty\right[$ et décroissante sur l'intervalle $\left]0,\sqrt{3}\right[$
3. Montrer que $g\left(\sqrt{3}\right)=2+\ln 3$ et vérifier que $g\left(\sqrt{3}\right)>0$
4. Déduire que $g\left(x\right)>0$ pour tout x de $]0,+\infty[$

Partie 2

On considère la fonction f de variable réel x définie sur $]0,+\infty[$ par
$f\left(x\right)=\left(x^2+3\right)\ln\left(x\right)$

Soit $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ (unité $3cm$)

5. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)$ et interpréter géométriquement le résultat
6. Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(x\right)$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ (On peut écrire $\frac{f(x)}{x}$ sous la forme $\left(\frac{x^2+3}{x}\right)\ln\left(x\right)$)
7. Déduire que $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ à déterminer
8. Montrer que $f'\left(x\right)=xg\left(x\right)$ pour tout x de $]0,+\infty[$, puis déduire que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$
9. Montrer que $f''\left(x\right)=\frac{2x^2\ln x+3\left(x^2-1\right)}{x^2}$ pour tout x de $]0,+\infty[$
10. Étudier le signe de $3\left(x^2-1\right)$ et $2x^2\ln x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$, puis déduire l'étude de la concavité de $\left(\mathscr{C}_f\right)$
11. Montrer que $y=4x-4$ est une équation cartésienne de la droite $\left(\Gamma\right)$ tangente à $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au point d'abscisse 1

12. Tracer la droite $(\mathit{\Gamma})$ et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

13. Montrer que $x \mapsto \frac{x^3}{3} + 3x$ est une fonction primitive de la fonction $x \mapsto x^2 + 3$ sur $\mathbb{R}$

14. En utilisant une intégration par partie montrer que $\int_1^e \left(x^2 + 3\right) \ln x dx \, \mathrm{d}\, x = \frac{2}{9} \left(14 + e^3\right)$

15. Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$