AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

Séance 17 (Probabilités)

**Professeur : Mr CHEDDADI Haitam**

Sommaire


I- Terminologie

1-1/ Expérience aléatoire

1-2/ Univers

1-3/ Éventualité

1-4/ Évènement

II- Probabilité sur $\Omega$ l'univers d'une expérience aléatoire

2-1/ Probabilité d'un cas possible à être réalisé

2-2/ Probabilité sur un univers fini (un ensemble fini)

2-3/ Hypothèse d'équiprobabilité

III- Probabilité conditionnelle – Deux événements indépendants - Probabilités composées

3-1/ Probabilité conditionnelle - Deux événements indépendants

3-2/ Probabilité totale

IV- Expérience répétée plusieurs fois

V- Variables aléatoire – loi de probabilité – espérance mathématique – variance – écart-type

5-1/ Variables aléatoire

5-2/ Loi de probabilité d'une variable aléatoire $X$

5-3/ Espérance mathématique - variance – écart-type d'une variable aléatoire $X$

VI- Loi binomiale ou distribution binomiale

VII- Exercices

7-1/ Exercice 1

7-2/ Exercice 2
7-3/ Exercice 3
7-4/ Exercice 4
7-5/ Exercice 5
7-6/ Exercice 6

---

# I- Terminologie

## 1-1/ Expérience aléatoire

Toute expérience dont ses résultats sont connus mais on ne pas donner le résultat de l'expérience avant de réaliser l'expérience ; on l'appelle expérience aléatoire.

Les résultats obtenues par cette expérience aléatoire on les note par $\omega_1$ puis $\omega_2$ puis $\omega_3$ …… $\omega_n$ (en général $\omega_i$ avec $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$).

**Exemple**

## 1-2/ Éventualité

Chaque $\omega_i$ s'appelle une éventualité ou un événement élémentaire.

Par exemple, lorsqu'on obtient 1, on dit que $\omega_1 = 1$ est une éventualité ou cas possible.

## 1-3/ Univers

Les éventualités (ou les événements élémentaires) constituent un ensemble qui s'appelle univers.

Il est noté $\Omega(\omega_1, \omega_2, \ldots., \omega_n)$.

## 1-4/ Évènement

Toute partie $A$ de $\Omega$ s'appelle événement.

Par exemple, $A = \{PP, FF\} \subset \Omega$, donc $A = \{PP, FF\}$ est un évènement.

On peut exprimer un évènement par une phrase : $A = \{PP, FF\}$ les deux lancements de dé donnent le même résultat

Si $A = \Omega$ alors l'évènement $\Omega$ s'appelle événement certain.

Si $A = \emptyset$ alors l'évènement $\emptyset$ s'appelle événement impossible.

Si $A = \{\omega_i\}$ alors l'évènement $\{\omega_i\}$ s'appelle événement élémentaire.

Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que $A$ et $B$ sont deux événements incompatibles .

Si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$ alors $B$ s'appelle l'événement contraire de $A$ (et vis versa), on note $B = \overline{A}$ ( de même $A = \overline{B}$).

L'événement $A \cap B$ est l'ensemble constitué par des éventualités réalisées à la fois par les événements $A$ et $B$.

L'événement $A \cup B$ est l'ensemble constitués par des éventualités réalisées soit par l'événement $A$ ou par l'événement $B$.

Les événements $A_1$ et $A_2$ et ..... $A_p$ est une partition de $\Omega$ s'ils sont disjoints deux à deux et $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p = \Omega$.

# II- Probabilité sur $\Omega$ l'univers d'une expérience aléatoire

## 2-1/ Probabilité d'un cas possible à être réalisé

On lance dans l'air une pièce de monnaie 2 fois successives (si le 1er lancer donne P et le 2ème lancer donne F, cette éventualité (ou cas possible) sera notée PF.

Cette expérience est répétée 1000 fois, on obtient les résultats suivants :

| Cas possibles (événement élémentaire) | FF | FP | PF | PP |
|---|---|---|---|---|
| Nombres de cas | 240 | 260 | 270 | 230 |

- Quel est l'événement élémentaire qui a une grande chance d'être réalisé ?
- Quel est l'événement élémentaire qui a une faible chance d'être réalisé ?

## 2-2/ Probabilité sur un univers fini (un ensemble fini)

### Définition

Soit $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.

Lorsqu'on répète une expérience aléatoire N fois dans les mêmes conditions, si $n_i$ est le nombre de fois on a obtenu $\omega_i$, Le nombre $\frac{n_i}{N}$ s'appelle la probabilité de l'événement élémentaire $\{\omega_i\}$, on note $p_i = p(\{\omega_i\}) = \frac{n_i}{N}$, et on a $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$.

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent A, on note $p(A)$ (exemple : $\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_6\}$ donc
$p(A) = p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_3\}) + p(\{\omega_6\})$)

### Exemple

### Propriété

A et B sont deux événements d'un univers $\Omega$ d'une expérience aléatoire.

$\forall A \in \Omega\,;\ 0 \leq p(A) \leq 1$
$p(\Omega) = 1$
$p(\emptyset) = 0$
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
$p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$

## 2-3/ Hypothèse d'équiprobabilité

Si dans une expérience aléatoire (dont l'univers est $\Omega$), tous les événements élémentaires $A = \{\omega_i\}$ ont la même probabilité (c.à.d. $p(\{\omega_1\}) = p(\{\omega_2\}) = \ldots = p(\{\omega_n\})$), alors la probabilité d'un évènement A de $\Omega$ est $p(A) = \frac{cardA}{card\Omega}$.

### Remarque

L'équiprobabilité est exprimé par les expressions suivants :

- Des boules indiscernables aux touché.
- On lance un dé (ou une pièce de monnaie) au hasard.

# III- Probabilité conditionnelle – Deux événements indépendants - Probabilités composées

## 3-1/ Probabilité conditionnelle - Deux événements indépendants

### Définition

A et B sont deux événements d'un univers $\Omega$ d'une expérience aléatoire.

La probabilité de l'événement B sachons que l'événement A est réalisé est $\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$, on la note par $p_A(B)$ ou par $p({}^{B}/_{A})$.

A et B sont deux événements indépendants si $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$ ou $p_A(B)=p(B)$.

$p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$, l'écriture $p(A\cap B)=p(A).p_A(B)=p(B).p_B(A)$ s'appelle la formule de probabilité composée.

### Exemple

## 3-2/ Probabilité totale

Définition

$A_1$, $A_2$, $A_3$,....et $A_n$ sont des événements d'un univers $\Omega$ d'une expérience aléatoire qui forment une partition de $\Omega$.

$A_1$, $A_2$, $A_3$,....et $A_n$ sont disjoints 2 à 2 et $A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots.A_n=\Omega$.

La probabilité d'un événement B de $\Omega$ est :

$$p(B)=p(A_1)p_{A_1}(B)+p(A_2)p_{A_2}(B)+\ldots.+p(A_n)p_{A_n}(B)$$

# IV- Expérience répétée plusieurs fois

### Propriété

Soit $p=p(A)$ la probabilité d'un événement A d'un univers $\Omega$ d'une expérience aléatoire.

Soit l'événement C « l'événement A était réalisé k fois après avoir répété cette expérience aléatoire n fois dans les mêmes conditions de départ » avec $k\in\{0,1,2,\ldots,n\}$.

La probabilité de l'événement C est $p(C)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ avec $k\in\{0,1,2,\ldots,n\}$ et $p=p(A)$.

### Exemple

# V- Variables aléatoire – loi de probabilité – espérance mathématique – variance – écart-type

## 5-1/ Variables aléatoire

On va relier une relation entre l'ensemble des cas possible vers l'ensemble $\mathbb{R}$.

Cette relation notée $X$ est appelée variable aléatoire définie de la manière suivante :

$X:\Omega\to\mathbb{R}$

$\omega_i\to X(\omega_i)=x_i$ tel que $x_i$ est le nombre des numéros impaire pour chaque tirage $\omega_i$.

Les nombres 0 et 1 et 2 sont appelés les valeurs de la variable aléatoire $X$, on note $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ et $x_3 = 2$, ces nombres constituent un ensemble noté $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ st appelé ensemble des valeurs de la variable aléatoire $X$, dans le cas général on note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Tous les cas possibles $\omega_i$ (les événements élémentaires) qui sont reliés par $x_i$ forment une partie de $\Omega$, cette partie (c'est un événement) sera notée par $(X = x_i) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\}$ .

L'écriture $p(X = x_i)$ signifie probabilité de l'événement $(X = x_i)$.

## 5-2/ Loi de probabilité d'une variable aléatoire $X$

### Définition

Soit $X$ une variable aléatoire définie sur un univers $\Omega$ d'une expérience aléatoire.

L'ensemble des valeurs de $X$ est $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Loi de probabilité de $X$ : c'est de calculer toutes les probabilités $p(X = x_i)$ avec $x_i \in X(\Omega)$.

On a : $\sum_1^n p(X = x_i) = 1$

### Exemple

## 5-3/ Espérance mathématique - variance – écart-type d'une variable aléatoire $X$

### Définition

Soit $X$ une variable aléatoire définie sur un univers $\Omega$ d'une expérience aléatoire.

L'ensemble des valeurs de $X$ est $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Le nombre $\sum_1^n x_i . p(X = x_i)$ s'appelle l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$, on le note $E(X)$.

Le nombre $E(X^2) - [E(X)]^2 = \left[\sum_1^n (x_i)^2 . p(X = x_i)\right] - [E(X)]^2$ s'appelle la variance de la variable aléatoire $X$, on la note $V(X)$. On a $V(X) \geq 0$.

Le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ s'appelle l'écart-type de la variable aléatoire $X$, on le note $\sigma(X)$ .

### Exemple

# VI- Loi binomiale ou distribution binomiale

### Définition et propriété

Soit p est la probabilité de l'événement A d'une expérience aléatoire (seulement une fois).

On répète cette expérience n fois (dans les mêmes conditions de départ).

On considère la variable aléatoire X définie de la manière suivante « le nombre de fois tel que l'évènement A est réalisé après la répétition de l'expérience de départ n fois »

L'ensemble des valeurs de $X$ est $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$.

X est appelé loi binomiale (ou distribution) de paramètres n et p, on la note $X = B(n, p)$.

### Exemple

# VII- Exercices

## 7-1/ Exercice 1

Une urne contient 10 boules : quatre boules rouges et six boules vertes (Les boules sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard, simultanément, deux boules de l'urne.

Soit $A$ l'évènement : « Les deux boules tirées sont rouges ».

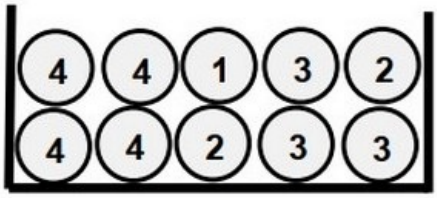
1. Montrer que $p\left(A\right) = \frac{2}{15}$

Soit $X$ la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges restantes dans l'urne après le tirage des deux boules.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs prises par $X$ est $\{2, 3, 4\}$.
3. Montrer que $p\left(X = 3\right) = \frac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$.

## 7-2/ Exercice 2

Une urne contient 10 boules portant les nombres 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 (Les boules sont indiscernables au toucher) :




On considère l'expérience suivante : on tire au hasard , successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

Soit $A$ l'évènement : "Obtenir deux boules portant deux nombres pairs".

1. Montrer que $p\left(A\right) = \frac{1}{3}$

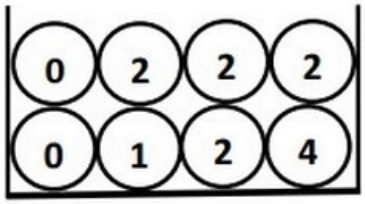
On répète l'expérience précédente trois fois de suite, en remettant dans l'urne les deux boules tirées après chaque expérience.

Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'évènement $A$ est réalisé.

2. Montrer que $p\left(X = 1\right) = \frac{4}{9}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$.

## 7-3/ Exercice 3

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher portant chacune un nombre comme indiqué sur la figure suivante :



On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.

Soit $A$ l'événement : « Parmi les trois boules tirées, aucune boule ne porte le nombre 0 », et $B$ l'événement : « Le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égal à 8 »

1. Montrer que $p\left(A\right) = \frac{5}{14}$ et que $p\left(B\right) = \frac{1}{7}$

Soit $X$ la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des nombres portés par les trois boules tirées.

2. Montrer que $p\left(X = 16\right) = \frac{3}{28}$

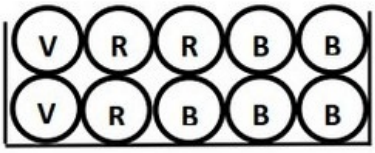
Le tableau suivant concerne la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ :

| $x_i$ | 0 | 4 | 8 | 16 |
|---|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | | | | $\frac{3}{28}$ |

3. Compléter le tableau en justifiant chaque réponse.

## 7-4/ Exercice 4

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : Cinq boules blanches, trois boules rouges et deux boules vertes :




On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.

Soit $A$ l'événement : "Parmi les quatre boules tirées, une seule boule est verte", et $B$ l'événement : "Parmi les quatre boules tirées, il y a exactement trois boules de même couleur".

1. Montrer que $p\left(A\right) = \frac{8}{15}$ et que $p\left(B\right) = \frac{19}{70}$

Soit $X$ la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules vertes tirées.

2. Montrer que $p\left(X = 2\right) = \frac{2}{15}$
3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ et montrer que l'espérance mathématique $E\left(X\right)$ est égale à $\frac{4}{5}$.

## 7-5/ Exercice 5

Une caisse contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 5 boules rouges. (indiscernables au toucher).

On tire au hasard et simultanément trois boules de la caisse.

On considère les deux événements :

- A: Obtenir trois boules de même couleurs
- B: Obtenir trois boules de couleurs différentes deux à deux

1. Montrer que $P\left(A\right) = \frac{3}{44}$ et $P\left(B\right) = \frac{3}{11}$.

Soit $X$ la variable aléatoire qui à chaque tirage fait correspondre le nombre de couleur des boules tirées.

2. Déterminer les valeurs prises par $X$.
3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$, et calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

## 7-6/ Exercice 6

Une caisse contient dix boules : 5 boules blanches, 3 boules rouges et deux boules noires (indiscernables au toucher).

On tire au hasard et simultanément quatre boules de la caisse.

On considère les deux événements :

- A: Obtenir une seule boule rouge.
- B: Obtenir une boule blanche au moins.

1. Montrer que $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{41}{42}$.

Soit $X$ la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges tirées.

2. Vérifier que les valeurs prises par $X$ sont $0$ ; $1$ ; $2$ ; $3$.
3. Montrer que $P(X = 0) = \frac{1}{6}$ et $P(X = 2) = \frac{3}{10}$.
4. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$.