

Sommaire

I- Produit scalaire dans l'espace

1-1/ Définition

1-2/ Remarques

1-3/ Propriétés

II- Base et repère orthonormé

2-1/ Rappel

2-2/ Technique

2-3/ Définitions

III- Expression analytique de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ IV- Ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k$

V- Plan déterminé par un point et un vecteur normal

5-1/ Vecteur normal à un plan

5-2/ Ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que
 $ax + by + cz + d = 0$ 5-3/ Ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

VI- Distance d'un point à un plan

6-1/ Définition

6-2/ Propriété

VII- Parallélisme et orthogonalité des droites et des plans

7-1/ Parallélisme et orthogonalité de deux plans

7-2/ Parallélisme et orthogonalité d'une droite et un plan

IIX- Étude analytique de la sphère

8-1/ Définition d'une sphère

8-2/ Équation cartésienne d'une sphère

8-3/ Équation cartésienne d'une sphère déterminée par un diamètre $[AB]$

8-4/ L'ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

8-5/ Positions relatives d'une sphère et un plan

8-6/ Positions relatives d'une sphère et une droite

IX- Exercices

9-1/ Exercice 1

9-2/ Exercice 2

9-3/ Exercice 3

9-4/ Exercice 4

9-5/ Exercice 5

9-6/ Exercice 6

I- Produit scalaire dans l'espace

1-1/ Définition

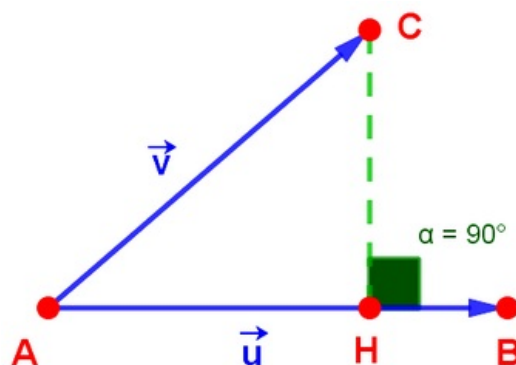
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul de l'espace ($\mathcal{E}$)

A, B et C sont trois points de ($\mathcal{E}$) tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

H est la projection de C sur la droite (AB) .

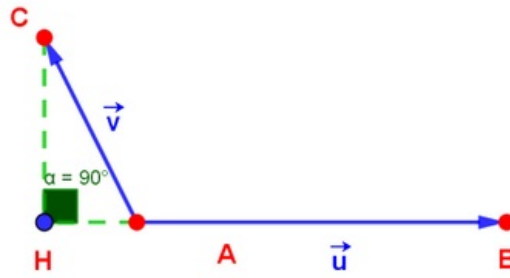
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté par $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ou $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ tel que :

Cas 1



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AH$$

Cas 2



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \cdot AH$$

1-2/ Remarques

$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$ est le carré scalaire de $\vec{u}$ et est toujours positif.

$\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = AB$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, on note : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = AB$.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire $\Leftrightarrow |\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

Exemple

1-3/ Propriétés

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace ($\mathcal{E}$) et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a :

$$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

Symétrie du produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Positivité du produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 \geq 0$

Non dégénère : $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Linéarité du produit scalaire : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

I- Base et repère orthonormé

2-1/ Rappel

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace ($\mathcal{E}$) rapporté à une base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans cet ordre est le nombre :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (xy'z'' - xz'y'') + (-yx'z'' + yz'x'') + (zx'y'' - zy'x'')$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

2-2/ Technique

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' & x'' & x & x' \\ y & y' & y'' & y & y' \\ z & z' & z'' & z & z' \end{vmatrix} = (1) + (2) + (3) - (4) - (5) - (6)$$

2-3/ Définitions

$\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une base de l'espace ($\mathcal{E}$) équivaut à $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas

coplanaires : $\left(\det(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \neq 0\right)$

Prenons un point O de l'espace ($\mathcal{E}$)

Le quadruplé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est appelé repère de ($\mathcal{E}$)

Si $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$, alors :

- La base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une base orthonormée.
- Le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un repère orthonormé.



Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$

La distance AB est : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

IV- Ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k$

L'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k$ est un plan (P) d'équation de la forme : $ax + by + cz + d = 0$.

V- Plan déterminé par un point et un vecteur normal

Tout vecteur $\vec{n}$ non nul sa direction est perpendiculaire au plan (P) s'appelle vecteur normal au plan (P) .

Si $\vec{n}$ est normale au plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$, alors $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$.

Si $\vec{n}$ est normale au plan (P) et passe par A le plan (P) est noté par $P(A, \vec{n})$.

Exemple

Définition

Tout vecteur $\vec{n}$ non nul sa direction est perpendiculaire au plan (P) s'appelle vecteur normal au plan (P) .

Remarques

Si $\vec{n}$ est normale au plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$, alors $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$.

Si $\vec{n}$ est normale au plan (P) et passe par A le plan (P) est noté par $P(A, \vec{n})$.

Exemple

5-2/ Ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que
 $ax + by + cz + d = 0$

Propriété

L'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ qui vérifie $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est un plan, et le vecteur non nul $\vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal à ce plan.

Exemple

5-3/ Ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Propriété 1

$\vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur non nul et $A(x_A, y_A, z_A)$ est un point de l'espace $(\mathcal{E})$.

L'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ qui vérifie $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan (P) qui passe par A et le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal à ce plan (c.à.d. $P(A, \vec{n})$).

Le plan (P) a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.

Exemple

Propriété 2

Tout plan $P(A, \vec{n}(a, b, c))$ a pour équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ la réciproque avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

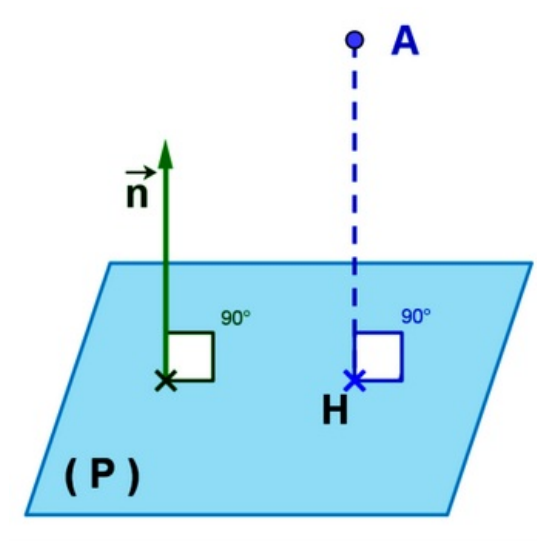
Exemple

VI- Distance d'un point à un plan

6-1/ Définition

(P) est un plan et A est un point de l'espace et H est la projection orthogonale de A sur le plan (P) .

La distance du point A au plan (P) est AH , et on note $AH = d(A, (P))$.



6-2/ Propriété

(P) est un plan et $A(x_A, y_A, z_A)$ est un point de l'espace $(\mathcal{E})$ tel que (P) a pour équation $ax + by + cz + d = 0$.

La distance du point A au plan (P) est :

$$AH = d(A, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

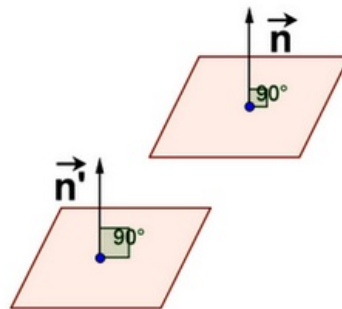
VII- Parallélisme et orthogonalité des droites et des plans

7-1/ Parallélisme et orthogonalité de deux plans

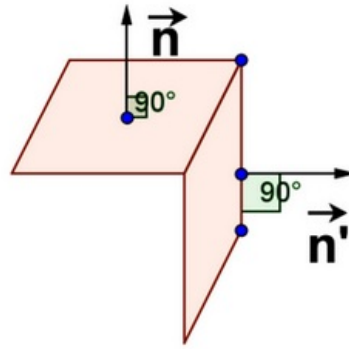
Propriété

Soient $(P_1) : ax + by + cz + d = 0$ et $(P_2) : a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

$$(P_2) \parallel (P_1) \Leftrightarrow \vec{n}' = \alpha \vec{n}$$



$$(P_2) \perp (P_1) \Leftrightarrow \vec{n}' \cdot \vec{n} = 0$$

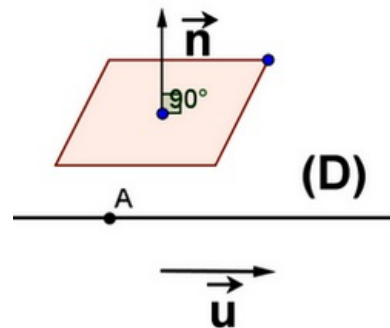


Exemple

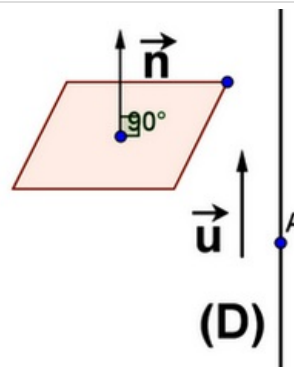
Propriété

Soient $P(B, \vec{n})$ et $D(A, \vec{u})$

$$(D) \parallel (P) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$



$$(D) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u} = \alpha \vec{n}$$



Exemple

IIX- Étude analytique du sphère

8-1/ Définition d'une sphère

Ω est un point donné de l'espace ($\mathcal{E}$) et $R > 0$

L'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace ($\mathcal{E}$) tel que $\Omega M = R$ s'appelle la sphère de centre Ω et de rayon R .

On note (S) ou $S(\Omega, R)$

8-2/ Équation cartésienne d'une sphère

L'équation cartésienne de $(S) = S(\Omega(a, b, c), R)$ est :

$$M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \Omega M = R$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \text{ avec } d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$$

8-3/ Équation cartésienne d'une sphère déterminée par un diamètre $[AB]$

Définition

Ω est le milieu de $[AB]$

$[AB]$ est un diamètre du sphère (S) donc A et B appartiennent à (S)

On dit la sphère de diamètre $[AB]$ on note (S) ou $S_{[AB]}$.

Propriété

L'équation cartésienne de $S_{[AB]}$ est : $M(x, y, z) \in S_{[AB]} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

ou bien $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$

8-4/ L'ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

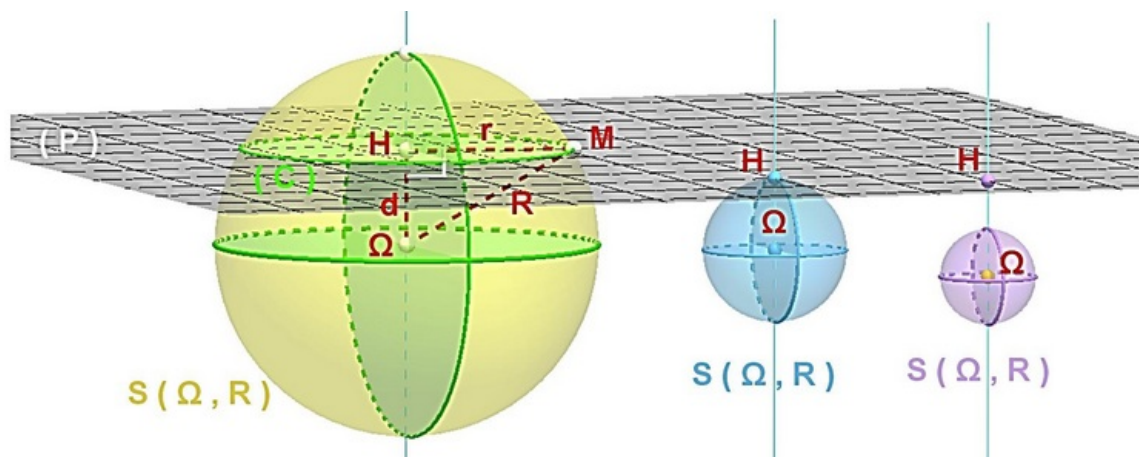
On pose $A = a^2 + b^2 + c^2 - 4d$

L'ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ est :

- $(E) = \emptyset$ si $A < 0$
- $(E) = \left\{ \Omega \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right) \right\}$ si $A = 0$
- La sphère $(E) = S \left(\Omega \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right), R = \frac{\sqrt{A}}{2} \right)$ si $A > 0$

II- Étude analytique de la sphère

8-5/ Positions relatives d'une sphère et un plan



Cas 1 : $d = \Omega H > R$

$$(P) \cap (S) = \emptyset$$

Cas 2 : $d = \Omega H = R$

$(P) \cap (S) = \{H\}$; (P) et (S) sont tangents en H avec $(H\Omega) \perp (P)$

Cas 3 : $d = \Omega H < R$

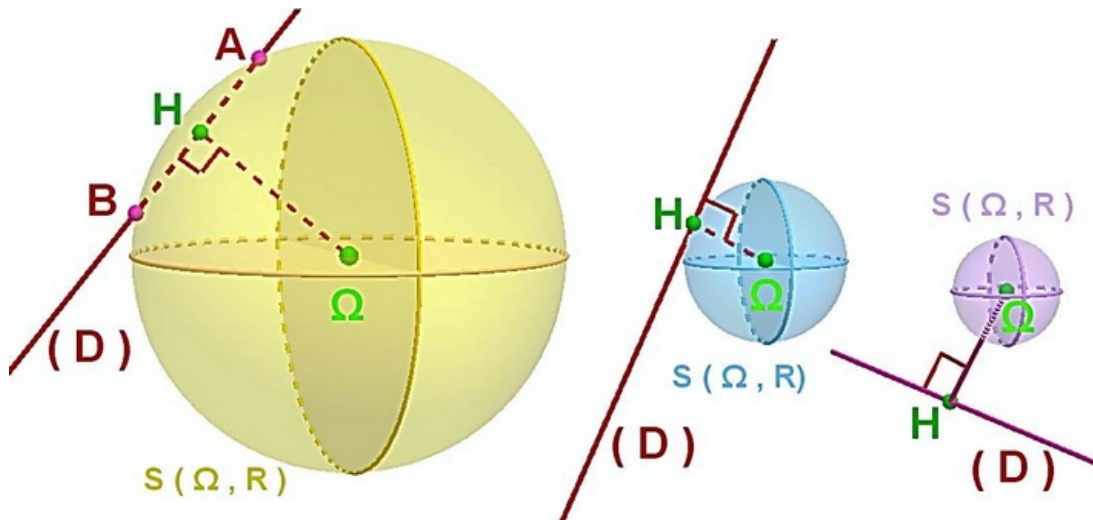
$(P) \cap (S) = (C)$; (P) coupe (S) suivant le cercle de centre H et de rayon $r = R_c = \sqrt{R^2 - d^2}$

Équation du plan tangent à une sphère

Par un point A quelconque d'une sphère (S) il existe un et un seul plan (Q) tangente au sphère (S) au point A .

L'équation de (Q) est : $M \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AO} = 0$

8-6/ Positions relatives d'une sphère et une droite



Cas 1 : $d = \Omega H > R$

$$(D) \cap (S) = \emptyset$$

Cas 2 : $d = \Omega H = R$

$(D) \cap (S) = \{H\}$; (D) et (S) sont tangents en H avec $(H\Omega) \perp (D)$

Cas 3 : $d = \Omega H < R$

(D) coupe (S) en deux points A et B (Deux points mais pas le segment $[AB]$)

IX- Exercices

9-1/ Exercice 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(2, 1, 3)$, $B(3, 1, 1)$, $C(2, 2, 1)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$$

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

- En déduire que $2x + 2y + z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .
- Montrer que la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(1, -1, 0)$ et pour rayon 6.
- Montrer que $d(\Omega, (ABC)) = 3$, et en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) .
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC) .
- Montrer que le point B est le centre du cercle (Γ) .

9-2/ Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan (P) passant par le point $A(0, 1, 1)$ et dont $\vec{u}(1, 0, -1)$ est un vecteur normal et la sphère (S) de centre le point $\Omega(0, 1, -1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

- Montrer que $x - z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P) .
- Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) et vérifier que $B(-1, 1, 0)$ est le point de contact.
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et orthogonale au plan (P) .
- Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) au point $C(1, 1, 0)$.
- Montrer que $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle OCB .

9-3/ Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$ et le plan (P) d'équation $y - z = 0$.

- Montrer que la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(1, 1, 1)$ et pour rayon 2.
 - Calculer $d(\Omega, (P))$ et en déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) .
 - Déterminer le centre et le rayon du cercle (C) .
- Soit (Δ) la droite passant par le point $A(1, -2, 2)$ et orthogonale au plan (P) .
- Montrer que $\vec{u}(0, 1, -1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) .
 - Montrer que $\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{2} \|\vec{u}\|$ et en déduire que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.
 - Déterminer les coordonnées de chaque point d'intersection de la droite (Δ) et de la sphère (S) .

9-4/ Exercice 4

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0, -2, -2)$, $B(1, -2, -4)$ et $C(-3, -1, 2)$.

1. Montrer que $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et en déduire que $2x + 2y + z + 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

On considère la sphère (S) dont une équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0.$$

2. Vérifier que la sphère (S) a pour centre $\Omega(1, 0, 1)$ et pour rayon $R = 5$.
3. Vérifier que $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC) .
4. Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) .
5. Vérifier que $d(\Omega, (ABC)) = 3$, puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle de rayon 4, dont on déterminera le centre.

9-5/ Exercice 5

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan (P) d'équation $x + 2y - z - 1 = 0$.

1. Les points $A(1; 1; 2)$ et $B(2; 1; 1)$ appartiennent-ils au plan (P) ?
2. Calculer la distance AB puis les distances de ces deux points A et B au plan (P) .
3. Le point A est-il le projeté orthogonal de B sur le plan (P) ?

9-6/ Exercice 6

On considère les plans d'équations respectives $(P) x - y + z = 0$ et $(Q) 2x + 3y + z - 6 = 0$, et la sphère (S) de centre $\Omega(1; 2; 4)$ et tangente au plan (P) .

Soit la droite (Δ) qui passe par Ω et perpendiculaire au plan (Q) .

1. Montrer que les plans (P) et (Q) sont orthogonaux.
2. Déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S) .
3. Déterminer le point de tangence de (P) et (S) .
4. Déterminer le point d'intersection de (Δ) et (Q) .
5. Montrer que le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

