

Sommaire

I- Intégrale d'une fonction continue

1-1/ Définition

1-2/ Propriété 1

1-3/ Propriété 2 (Relation de Chasles)

1-4/ Propriété 3 (Intégrales et inégalité)

II- Interprétation géométrique d'une intégrale

2-1/ Définition

2-2/ Propriété (Notion de l'intégrale)

III- La valeur moyenne

3-1/ Propriété

IV- Intégration par parties

4-1/ Théorème

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

5-2/ Exercice 2

5-3/ Exercice 3

5-4/ Exercice 4

I- Intégrale d'une fonction continue

1-1/ Définition

f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Le nombre $F(b) - F(a)$ est appelé intégral de f de a à b .

On note $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$.

On lit intégral de a à b de $f(x)dx$.

Remarque

Pour toute fonction f continue, on a : $\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$

Pour toute fonction f continue sur $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = - \int_b^a f(x) dx$$

Exemple

1-2/ Propriété 1

f et g sont deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$.

On a :

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

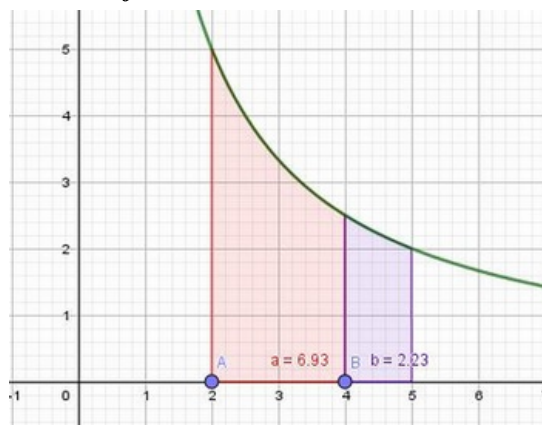
$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx ; (\alpha \in \mathbb{R})$$

1-3/ Propriété 2 (Relation de Chasles)

f est une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois réels appartenant à I .

On a :

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \text{ avec } a \leq b \leq c. \text{ (Relation de Chasles).}$$



1-4/ Propriété 3 (Intégrales et inégalité)

f et g sont deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$.

Si f est positive sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Si pour tout $x \in [a, b]$ on a $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

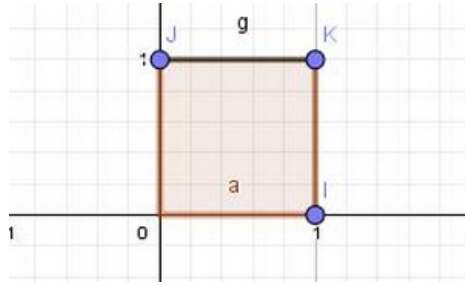
II- Interprétation géométrique d'une intégrale

2-1/ Définition

Soit un repère orthogonal du plan.

On note I et J les points tels que $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$.

L'unité d'aire, que l'on note $u. a.$, est l'aire de rectangle $OIKJ$

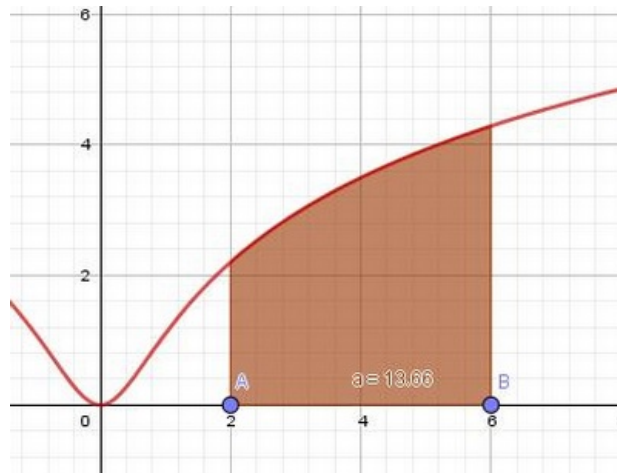


2-2/ Propriété (Notion de l'intégrale)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, et soit (\mathcal{C}_f) la courbe représentative de f dans le repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

L'aire A (exprimée en unité d'aire) de la partie (F) du plan (P) comprise entre la courbe (\mathcal{C}_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à l'intégrale de a à b de f .

On a : $A = \int_a^b f(x) dx$ (u.a)



III- La valeur moyenne

3-1/ Propriété

f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et $a < b$.

La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Il existe un élément c de $[a, b]$ tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

IV- Intégration par parties

4-1/ Théorème

u et v sont deux fonctions dérivables sur $[a, b]$.

Leurs dérivées u' et v' sont continues sur $[a, b]$.

On a :

$$\underbrace{\int_a^b u(x) \times v'(x) dx}_{(1)} = \underbrace{\left[u(x) \times v(x) \right]_a^b}_{(2)} - \underbrace{\int_a^b u'(x) \times v(x) dx}_{(3)}$$

$$u(x) = \dots \quad u'(x) = \dots$$

$$(1) \downarrow \quad (2) \searrow \quad - \quad \downarrow (3)$$

$$v'(x) = \dots \quad v(x) = \dots$$

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{4}{3x+1} dx$$

$$B = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

$$C = \int_0^{\ln(2)} e^{2x} - 3e^x dx$$

$$D = \int_1^5 3x(x^2 - 2)^2 dx$$

$$E = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$F = \int_0^{\ln 2} e^x (e^x - 1) dx$$

$$G = \int_1^e \frac{\ln^3(x)}{x} dx$$

$$H = \int_{\ln 2}^{\ln 7} \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+2}} dx$$

5-2/ Exercice 2

1. Montrer que $F : x \rightarrow \frac{1}{2} \ln^2 x$ est une fonction primitive de la fonction $f : x \rightarrow \frac{\ln x}{x}$
2. Calculer $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$
3. Vérifier que la fonction G définie sur $]0; +\infty[$ par $G(x) = x \ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln x$
4. Calculer $I = \int_1^e \ln x dx$
5. Vérifier que la fonction H définie sur $] -\infty; +\infty[$ par $H(x) = (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction h définie sur $] -\infty; +\infty[$ par $h(x) = xe^x$
6. Montrer que $\int_1^2 xe^x dx = e^2$
7. Calculer A l'aire du domaine délimité par la courbe (\mathcal{C}_h) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

5-3/ Exercice 3

1. Vérifier que $x^2 - 2x + 7 - \frac{10}{x+2} = \frac{x^3+3x+4}{x+2}$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$.
2. En déduire $I = \int_0^1 \frac{x^3+3x+4}{x+2} dx$
2. Calculer $\int_0^1 xe^x dx$ par une integration par parties et en déduire

$$\int_0^1 (x - e^{-2x})e^x dx$$

5-4/ Exercice 4

1. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

$$A = \int_0^1 xe^x dx$$

$$B = \int_e^{e^2} x^2 \ln(x) dx$$

$$C = \int_1^e \ln x dx$$

$$D = \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$E = \int_0^1 xe^{-x} dx$$

2. Vérifier que $\frac{(x+1)^2}{x^2+1} = 1 + \frac{2x}{x^2+1}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$).

3. En déduire l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx$.