AlloSchool

Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

Séance 11 (Calcul intégral)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Intégrale d'une fonction continue

1-1/ Définition

f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$ et F est une primitive de f sur $[a,b]$.

Le nombre $F(b)-F(a)$ est appelé intégral de f de a à b.

On note $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b$.

On lit intégral de a à b de $f(x)dx$.

Remarque

Pour toute fonction f continue, on a : $\int_a^a f\,(x)\,\mathrm{d}\,x = F\,(a) - F\,(a) = 0$

Pour toute fonction f continue sur $[a,b]$, on a :
$\int_a^b f\,(x)\,\mathrm{d}\,x = F\,(b) - F\,(a) = -\int_b^a f\,(x)\,\mathrm{d}\,x$

Exemple

1-2/ Propriété 1

f et g sont deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$.

On a :

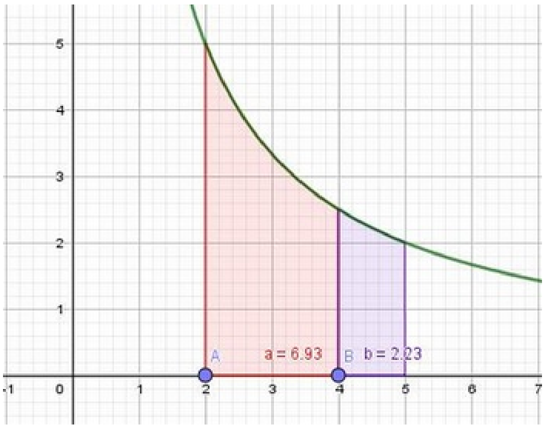
$$\int_a^b (f+g)\,(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b f\,(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_a^b g\,(x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$\int_a^b \alpha f\,(x)\,\mathrm{d}\,x = \alpha\int_a^b f\,(x)\,\mathrm{d}\,x\ ;\ \ (\alpha \in \mathbb{R})$$

1-3/ Propriété 2 (Relation de Chasles)

f est une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois réels appartenant à I.

On a :

$\int_a^c f\,(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b f\,(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_b^c f\,(x)\,\mathrm{d}\,x$ avec $a \leq b \leq c$. (Relation de Chasles).



1-4/ Propriété 3 (Intégrales et inégalité)

f et g sont deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$.

Si f est positive sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f\,(x)\,\mathrm{d}\,x \geq 0$.

Si pour tout $x \in [a,b]$ on a $f\,(x) \leq g\,(x)$, alors $\int_a^b f\,(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \int_a^b g\,(x)\,\mathrm{d}\,x$

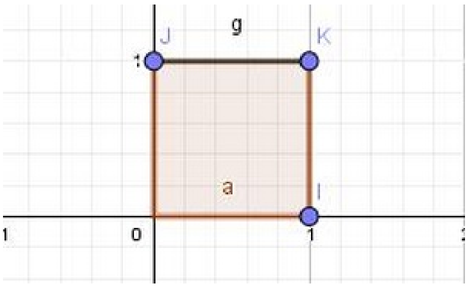
II- Interprétation géométrique d'une intégrale

2-1/ Définition

Soit un repère orthogonal du plan.

On note I et J les points tels que $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$.

L'unité d'aire, que l'on note $u.a$, est l'aire de rectangle $OIKJ$

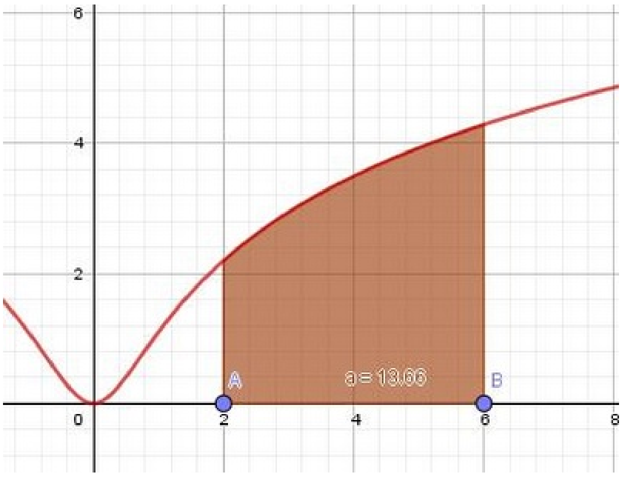


2-2/ Propriété (Notion de l'intégrale)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

L'aire A (exprimée en unité d'aire) de la partie (F) du plan (P) comprise entre la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à l'intégrale de a à b de f.

On a : $A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \ (u.a)$



III- La valeur moyenne

3-1/ Propriété

f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et $a < b$.

La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est le nombre μ défini par :

$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x.$

Il existe un élément c de $[a, b]$ tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$

IV- Intégration par parties

4-1/ Théorème

u et v sont deux fonctions dérivables sur $[a, b]$.

Leurs dérivées u' et v' sont continues sur $[a, b]$.

On a :

$$\underbrace{\int_a^b u(x)\times v'(x)\,dx}_{(1)} = \underbrace{\left[u(x)\times v(x)\right]_a^b}_{(2)} - \underbrace{\int_a^b u'(x)\times v(x)\,dx}_{(3)}$$

$$\begin{array}{ccc} u(x)=\cdots & & u'(x)=\cdots \\ (1)\downarrow & (2)\searrow \quad - & \downarrow(3) \\ v'(x)=\cdots & & v(x)=\cdots \end{array}$$

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$A=\int_0^1 \frac{4}{3x+1}\,\mathrm{d}\,x$ $B=\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}\,x$ $C=\int_0^{\ln(2)} e^{2x}-3e^x\,\mathrm{d}\,x$ $D=\int_1^5 3x\left(x^2-2\right)^2\,\mathrm{d}\,x$	$E=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x$ $F=\int_0^{\ln 2} e^x\left(e^x-1\right)\mathrm{d}\,x$ $G=\int_1^e \frac{\ln^3(x)}{x}\,\mathrm{d}\,x$ $H=\int_{\ln 2}^{\ln 7} \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+2}}\,\mathrm{d}\,x$

5-2/ Exercice 2

1. Montrer que $F : x \to \frac{1}{2}\ln^2 x$ est une fonction primitive de la fonction $f : x \to \frac{\ln x}{x}$
2. Calculer $I=\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}\,x$
3. Vérifier que la fonction G définie sur $]0;+\infty[$ par $G(x)=x\ln x-x$ est une fonction primitive de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g\left(x\right)=\ln x$
4. Calculer $I=\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}\,x$
5. Vérifier que la fonction H définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $H\left(x\right)=(x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction h définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $h\left(x\right)=xe^x$
6. Montrer que $\int_1^2 xe^x\,\mathrm{d}\,x=e^2$
7. Calculer A l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathscr{C}_h)$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

5-3/ Exercice 3

1. Vérifier que $x^2-2x+7-\frac{10}{x+2}=\frac{x^3+3x+4}{x+2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$.
2. En déduire $I=\int_0^1 \frac{x^3+3x+4}{x+2}\,\mathrm{d}\,x$
2. Calculer $\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}\,x$ par une integration par parties et en déduire

$\int_0^1 \left(x - e^{-2x}\right)e^x \,\mathrm{d}\, x$

5-4/ Exercice 4

1. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

$$A = \int_0^1 xe^x \,\mathrm{d}\, x$$
$$B = \int_e^{e^2} x^2 \ln\left(x\right) \mathrm{d}\, x$$
$$C = \int_1^e \ln x \,\mathrm{d}\, x$$
$$D = \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}\, x$$
$$E = \int_0^1 xe^{-x} \,\mathrm{d}\, x$$

2. Vérifier que $\frac{\left(x+1\right)^2}{x^2+1} = 1 + \frac{2x}{x^2+1} \ \left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$.
3. En déduire l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\left(x+1\right)^2}{x^2+1} \,\mathrm{d}\, x$.