

SommaireI- Équation différentielle de la forme  $y' = ay + b$ 

1-1/ Propriété 1

1-2/ Propriété 2

II- Équation différentielle de la forme  $y'' + ay' + by = 0$ 

2-1/ Définition

2-2/ Propriété

## III- Exercices

3-1/ Exercice 1

3-2/ Exercice 2

3-3/ Exercice 3

3-4/ Exercice 4

I- Équation différentielle de la forme  $y' = ay + b$ 

1-1/ Propriété 1

Soit l'équation différentielle  $(E) : y' = ay + b$ .**Cas général** ( $a \neq 0$ )l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $(E)$  sont les fonctions de la forme  $f(x) = \alpha \cdot e^{ax} - \frac{b}{a}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .**Cas particulier 1** ( $a = 0 ; b = 0$ )l'équation  $(E)$  est  $y' = 0$ , l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $(E)$  sont les fonctions de la forme  $f(x) = c$ .**Cas particulier 2** ( $a = 0 ; b \neq 0$ )l'équation  $(E)$  est  $y' = b$ , l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $(E)$  sont les fonctions de la forme  $f(x) = bx + \alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1-2/ Propriété 2

Soit l'équation différentielle ( $E$ ) :  $y' = ay + b$  avec ( $a \neq 0$ ).

Il existe une et une seule fonction  $f(x)$  qui est solution de l'équation ( $E$ ) et qui vérifie la condition initiale  $f(x_0) = y_0$  ;  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ .

## II- Équation différentielle de la forme $y'' + ay' + by = 0$

### 2-1/ Définition

L'équation différentielle de la forme  $y'' + ay' + by = 0$  tel que l'inconnue est la fonction  $y$  avec  $y'$  sa dérivée première et  $y''$  sa dérivée seconde, s'appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constant sans seconde membre.

L'équation  $r^2 + ar + b = 0$  ( $r \in \mathbb{C}$ ) s'appelle l'équation caractéristique de l'équation  $y'' + ay' + by = 0$ .

Le nombre  $\Delta = a^2 - 4b$  s'appelle le discriminant de l'équation caractéristique.

### 2-2/ Propriété

La solution générale de l'équation différentielle ( $E$ ) :  $y'' + ay' + by = 0$  dépend du signe de  $\Delta$ .

#### Cas 1 : $\Delta > 0$

L'équation caractéristique a deux solutions réelles sont  $r_1$  et  $r_2$ .

D'où la solution générale de ( $E$ ) sont les fonctions de la forme  $y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$  ;  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

#### Cas 2 : $\Delta = 0$

L'équation caractéristique a une solution réelle  $r_1$ .

D'où la solution générale de ( $E$ ) sont les fonctions de la forme  $y(x) = (\alpha x + \beta)e^{r_1 x}$  ;  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

#### Cas 3 : $\Delta < 0$

L'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées  $r_1 = p + qi$  et  $r_2 = \overline{r_1} = p - qi$ .

D'où la solution générale de ( $E$ ) sont les fonctions de la forme  $y(x) = (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))e^{px}$  ;  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

## III- Exercices

### 3-1/ Exercice 1

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}5y' &= 0 \\ y' &= -8y\end{aligned}$$

2. Résoudre  $y' = 5y + 1$  puis déterminer la solution qui vérifie la condition  $g(0) = 2$
3. Résoudre ( $E$ ) :  $y' + 2y = 0$

4. Montrer que  $y_0 = e^{-3x}$  est solution de l'équation  $(E')$  :  $y' + 2y = -e^{-3x}$ .

### 3-2/ Exercice 2

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : 4y'' - 4y' + y = 0$$

$$(E_2) : y'' - 2y' + 5y = 0$$

2. Résoudre l'équation  $(E)$  :  $y'' - 3y' + 2y = 0$

3. Déterminer la solution qui vérifie les conditions  $g(0) = -3$  et  $g'(0) = -2$ .

### 3-3/ Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : \begin{cases} y' = \frac{2}{x} - 1 + 4x \\ y(1) = -7 \end{cases}$$

$$(E_2) : \begin{cases} 2y' + 14y = 5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$(E_3) : \begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = -3 \end{cases}$$

### 3-4/ Exercice 4

1. Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 - 6z + 13 = 0$ .

2. Résoudre l'équation différentielle suivante  $(E)$  :  $y'' - 6y' + 13y = 0$ .

3. Déterminer la fonction  $f$  solution de  $(E)$  tel que  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 2$ .

4. En déduire la valeur de  $\int_0^\pi e^{3x} \sin(2x) dx$ .