

I- Exercice 1 (15 pts)**Partie 1**

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln(x)$

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ puis déduire leur signe.
2. Calculer $g(1)$ puis donner le tableau de variation de g (le calcul des limites n'est pas demandé).
3. En déduire que $g(x) \geq 0$ sur $[1, +\infty[$ et $g(x) \leq 0$ sur $]0, 1]$.

Partie 2

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln(x)$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

4. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, puis interpréter géométriquement le résultat.
5. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter géométriquement le résultat.
6. Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
7. Étudier le signe de $f'(x)$ puis donner le tableau de variation de la fonction f .
8. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse e .
9. Tracer (C_f) .

Partie 3

10. Montrer que $H : x \rightarrow \frac{1}{2} \ln^2 x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \rightarrow \frac{\ln x}{x}$
 11. Vérifier que la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = x \ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x$.
-

I- Exercice 2 (5 pts)

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

2. Déduire dans $]0, +\infty[$ les solutions de l'équation :

$$(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0$$

3. Dédurre dans $]0, +\infty[$ l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 < 0$$
