

Exercice 1 (9 pts)

1. Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1 - \frac{2}{1+e^x}$$

2. Simplifier le nombre :

$$E = \frac{e^{1-\ln 2}}{e^{1+\ln 2}}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} e^{\frac{1}{x}} &= e^x \\ \textcircled{2} 3e^{2x} - e^x - 2 &= 0 \\ \textcircled{3} 2^{x+1} &= 8 \\ \textcircled{4} 1 - 2e^x &< 0 \end{aligned}$$

4. Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + 2 = \\ C &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \\ E &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x)e^{2x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - e^{-x} + 4 = \\ D &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} = \\ F &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+x^2} = \end{aligned}$$

Exercice 2 (5 pts)

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 4z + 8 = 0$$

On considère dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé directe

$(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectivement : $a = 2 + 2i$,

$$b = 2 - 2i, c = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ et } d = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3}).$$

2. Écrire chacun des nombres b et c sous la forme trigonométrique.

3. Vérifier que $bc = d$.

4. Déduire l'argument du nombre complexe d .

Soit le point E l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

5. Montrer que l'affixe du point E est $e = -2 - 2i$ puis montrer que le triangle ABE est rectangle et isocèle en B .

III- Exercice 3 (6 pts)

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
2. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis donner le tableau de variation de g .
3. Dédire que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) > 0$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^x - x^2 - 1$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.
5. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ (Remarquer que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = x^2 \left(2 \frac{e^x}{x^2} - 1 \right) - 1$).
6. Déterminer les branches infinies de (C_f) .
7. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 2g(x)$.
8. Donner le tableau de variation de f .
9. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $] -0,6 ; -0,3[$.
10. Représenter (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.