Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

Séance 10 (Fonctions exponentielles)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Fonction exponentielle népérienne

1-1/ Définition

On appelle fonction exponentielle népérienne notée Exp, la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

$$\begin{aligned} exp\ :\ \mathbb{R} &\rightarrow]0,+\infty[\\ x &\rightarrow exp\left(x\right) \end{aligned}$$

1-2/ Conséquence

- Les fonctions Ln et exp sont des fonctions réciproques l'une de l'autre, pour tout $x>0$ et pour tout réel y :

$$\ln\left(x\right)=y\Leftrightarrow exp\left(y\right)=x$$

- Pour tout réel x on écrit aussi : $\forall x\in\mathbb{R}$:

Exemple

1-3/ Propriétés

$e^0=1\ et\ e^1=e$

$e^{-1}=\frac{1}{e^1}\ et\ \sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}$

$\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\ \ln\left(e^x\right)=x$

$\left(\forall x>0\right);\ e^{\ln x}=x$

$\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\left(\forall y>0\right);\ \ln y=x\Leftrightarrow e^x=y$

$\left(\forall x,y\in\mathbb{R}\right);\ e^x=e^y\Leftrightarrow x=y$

$\left(\forall x,y\in\mathbb{R}\right);\ e^x>e^y\Leftrightarrow x>y$

1-4/ Propriétés algébriques

Pour tous réels x et y et por tout nombre rationnel $r\in\mathbb{Q}$ on a :

$e^x\times e^y=e^{x+y}$

$e^{-x}=\frac{1}{e^x}$

$\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$

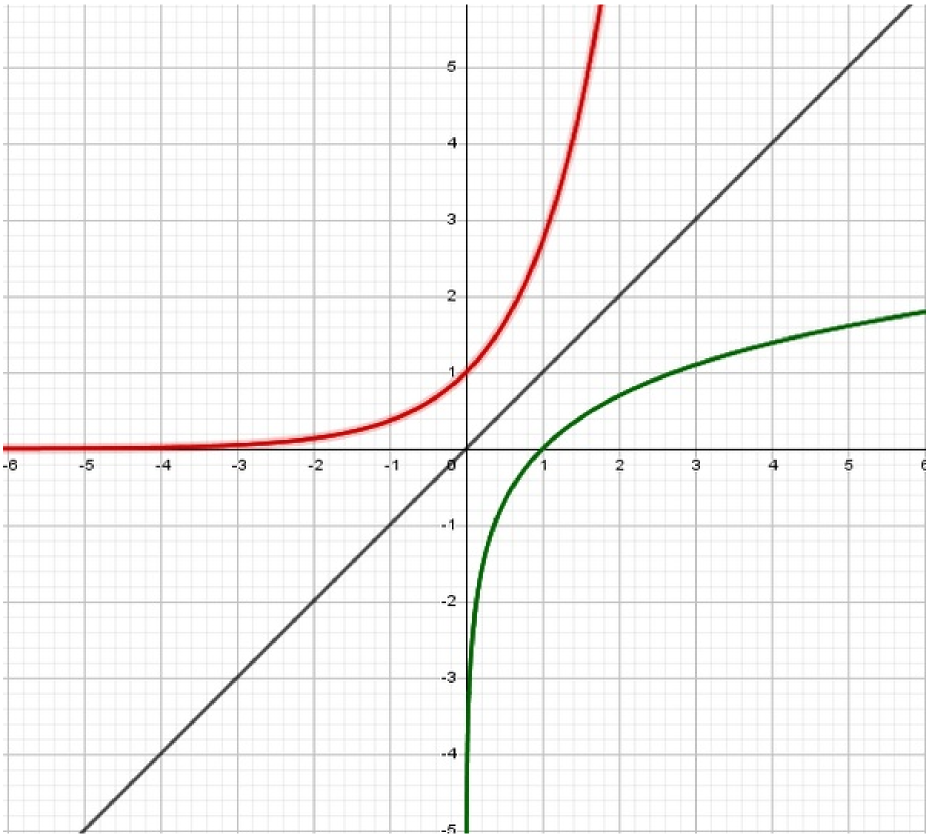
$\left(e^x\right)^r=e^{xr}$

1-5/ Courbe représentative de la fonction exponentielle

On a vu que la fonction exponentielle népérienne est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

Donc la courbe de la fonction exp notée $\mathscr{C}_{exp}$ et la courbe de la fonction $\ln$ notée $\mathscr{C}_{\ln}$ sont symétriques par rapport a la droite $\left(D\right)$ d'équation $y=x$,bien entendu, dans un repère orthonormal

La figure ci-dessous donne les représentations graphiques des deux fonctions :



I- Fonction exponentielle népérienne

1-6/ Limites usuelles

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \ (n \in \mathbb{N}^*)$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \ (n \in \mathbb{N}^*)$$
$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

1-7/ Dérivée de la fonction exponentielle

Propriété

la fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})\ (e^x)' = e^x$.

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Alors $x \mapsto e^x$ est dérivable sur I et $(\forall x \in \mathbb{R})\ \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$

Remarque

Soit U une fonction dérivable sur un intervalle I.

Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto u\text{'}\left(x\right) e^{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + \lambda \ (\lambda \in \mathbb{R})$.

Exemple

II- Exponentielle de base a

2-1/ Définition

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction exp_a qui à tout réel x associe le réel a^x tel que $exp_a\left(x\right) = a^x = e^{x\ln(a)}$.

Remarque

L'ensemble de définition de a^x est $\mathbb{R}$, l'exigence de stricte positivité et différent de 1 ne porte que sur a et l'égalité $a^x = e^{x\ln(a)}$ permet de comprendre pourquoi (condition d'existence d'un logarithme).

Lorsque $a = e$, on retrouve la fonction exp.

Pour tout réel strictement positif a et différent de 1, et pour tout réel x, on a $a^x > 0$

Pour tout réel strictement positif a et différent de 1, et pour tout réel x, on a $\ln\left(a^x\right) = x\ln\left(a\right)$

Exemple

2-2/ Propriété

Pour tous nombres réel strictement positifs a et b, et pour tous réel x et y on a :

$a^0 = 1 \quad ; \quad a^1 = a \quad ; \quad a^x \times a^y = a^{x+y}$
$a^x \times b^x = \left(a \times b\right)^x \quad ; \quad \left(a^x\right)^y = a^{xy}$
$\frac{a^x}{a^y} = a^x - y \quad ; \quad \frac{1}{a^x} = a^{-x}$

II- Exponentielle de base a

2-3/ Dérivée de la fonction exponentielle de base a

Propriété

Soit a un réel strictement positif.

La fonction exponentielle de base a est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et pour tout réel x on a :

$$\left(a^x\right)' = e^{x\ln(a)} = \ln\left(a\right).\, a^x$$

Exemple

2-4/ Tableau de variations

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

Cas 1 : $0 < a < 1$

Alors, $\ln(a) < 0$ d'où $(a^x)' < 0$, donc la fonction $x \mapsto a^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln(a)} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x \ln(a)} = +\infty$.

x	$+\infty$	$-\infty$
$(a^x)'$	$-$	
a^x	$+\infty$ $\searrow$	

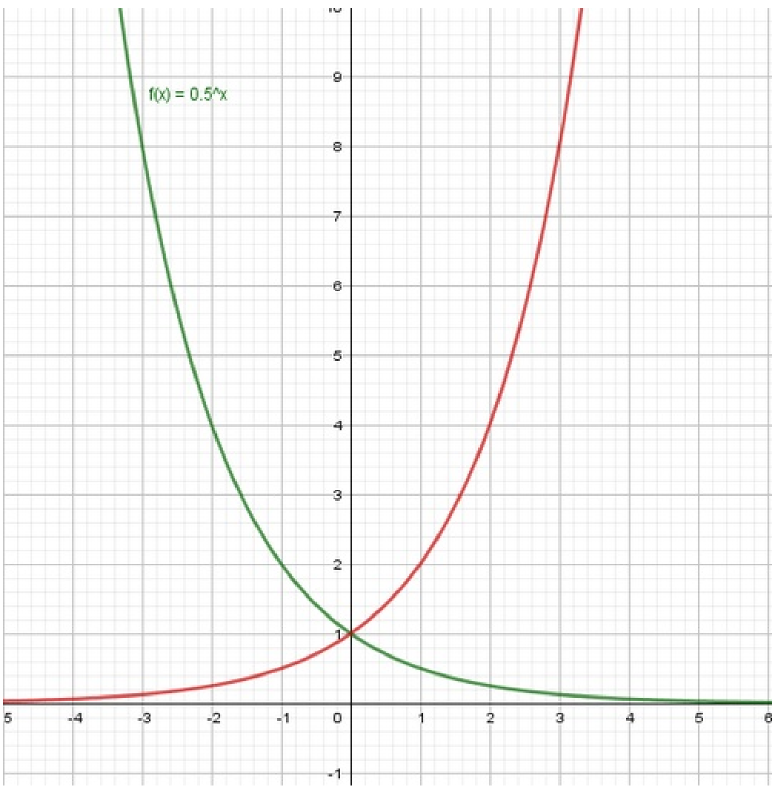
Cas 2 : $a > 1$

Alors, $\ln(a) > 0$ d'où $(a^x)' > 0$, donc la fonction $x \mapsto a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln(a)} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x \ln(a)} = 0$.

x	$+\infty$	$-\infty$
$(a^x)'$	$+$	
a^x	$\nearrow$ $+\infty$	

2-5/ Les représentations graphiques de $x \mapsto 0,5^x$ et $x \mapsto 2^x$



III- Exercices

3-1/ Exercice 1

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction numérique g d'une variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g\left(x\right)=e^{x}\left(x-1\right)+1$$

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $g'\left(x\right)=xe^{x}$.
2. Étudier le signe de $g'\left(x\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
3. Calculer $g\left(0\right)$ et dresser le tableau de variations de g (le calcul de limites n'est pas demandé).
4. Déduire que $g\left(x\right)\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Partie B - Étude de la fonction

Soit $f$la fonction numérique d'une variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f\left(x\right)=xe^{x}-2e^{x}+x$$

On appelle $\left(C_f\right)$ la courbe représentative de dans un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ d'unité graphique $2cm$.

5. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$
6. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.
7. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-\infty$ (on rappelle que $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$)
8. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)-x\right)=0$, puis interpréter géométriquement ce résultat.
9. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $f'\left(x\right)=g\left(x\right)$.
10. Déduire le signe de $f'\left(x\right)$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de f.
11. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α telle que $\frac{3}{2}<\alpha<2$.
12. Montrer que $f''\left(x\right)=xe^{x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, et en déduire que la courbe $\left(C_f\right)$ admet un point d'inflexion $I(0\,;-2)$.

3-2/ Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f\left(x\right)=x-2-e^{-x}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$.
2. Montrer que la droite $\left(\Delta\right)\;:\;y=x-2$ est une asymptote oblique à $\left(C_f\right)$ quand $x\to+\infty$.
3. Vérifier que $f\left(x\right)=x\left(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{xe^{x}}\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$*.
4. Déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)$ puis interpréter le résultat.

5. Étudier la position relative de $\left(C_f\right)$ et la droite $(\Delta)\ :\ y = x - 2$.
6. Calculer $f'\left(x\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
7. Donner le tableau de variations de f.
8. Tracer $\left(C_f\right)$.

3-3/ Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f\left(x\right) = \left(x-1\right)^2 e^x$
soit $\left(C_f\right)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.
3. Vérifier que $f\left(x\right) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 x^2 e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
4. Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right) = 0$ puis interpréter géométriquement le résultat.
5. Montrer que $f'\left(x\right) = \left(x^2 - 1\right)e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
6. Étudier le signe de $f'\left(x\right)$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f(-1)$ et $f(1)$ et dresser le tableau de variation de f.
7. Montrer que F définie par $F\left(x\right) = \left(x^2 - 4x + 5\right)e^x$ est une fonction primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
8. tracer $\left(C_f\right)$
9. Déterminer géométriquement le nombre de solutions de l'équation $f\left(x\right) = 1$.

3-4/ Exercice 4

Partie I

Soit la fonction numérique g d'une variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g\left(x\right) = 2 + xe^x$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g\left(x\right)$.
2. Calculer $g'\left(x\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis déduire le signe.
3. En déduire que $g\left(x\right) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Partie II

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f\left(x\right) = 2x + (x-1)e^x$

Et soit $\left(C_f\right)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

4. Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right) - 2x = 0$, puis interpréter géométriquement le résultat.
5. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter géométriquement le résultat.
6. Étudier la position relative de la droite $\left(\Delta\right):\ y = 2x$ et $\left(C_f\right)$.
7. Montrer que $f'\left(x\right) = g\left(x\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
8. Étudier le signe de $f'\left(x\right)$ puis donner le tableau de variation de la fonction f.
9. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
10. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α tel que $0 < \alpha < 1$.
11. Tracer $\left(C_f\right)$ et $\left(\Delta\right)$.