Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

Séance 10 (Fonctions exponentielles)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Fonction exponentielle népérienne

1-1/ Définition

On appelle fonction exponentielle népérienne notée Exp, la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

$$exp\ :\ \mathbb{R} \rightarrow]0,+\infty[$$
$$x \rightarrow exp\,(x)$$

1-2/ Conséquence

- Les fonctions Ln et exp sont des fonctions réciproques l'une de l'autre, pour tout $x > 0$ et pour tout réel y :

$$\ln(x) = y \Leftrightarrow exp\,(y) = x$$

- Pour tout réel x on écrit aussi : $\forall x \in \mathbb{R}$:

Exemple

1-3/ Propriétés

$e^0 = 1\ et\ e^1 = e$
$e^{-1} = \frac{1}{e^1}\ et\ \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$

$(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ \ln(e^x) = x$

$(\forall x > 0)\ ;\ e^{\ln x} = x$

$(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y > 0)\ ;\ \ln y = x \Leftrightarrow e^x = y$

$(\forall x, y \in \mathbb{R})\ ;\ e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

$(\forall x, y \in \mathbb{R})\ ;\ e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$

1-4/ Propriétés algébriques

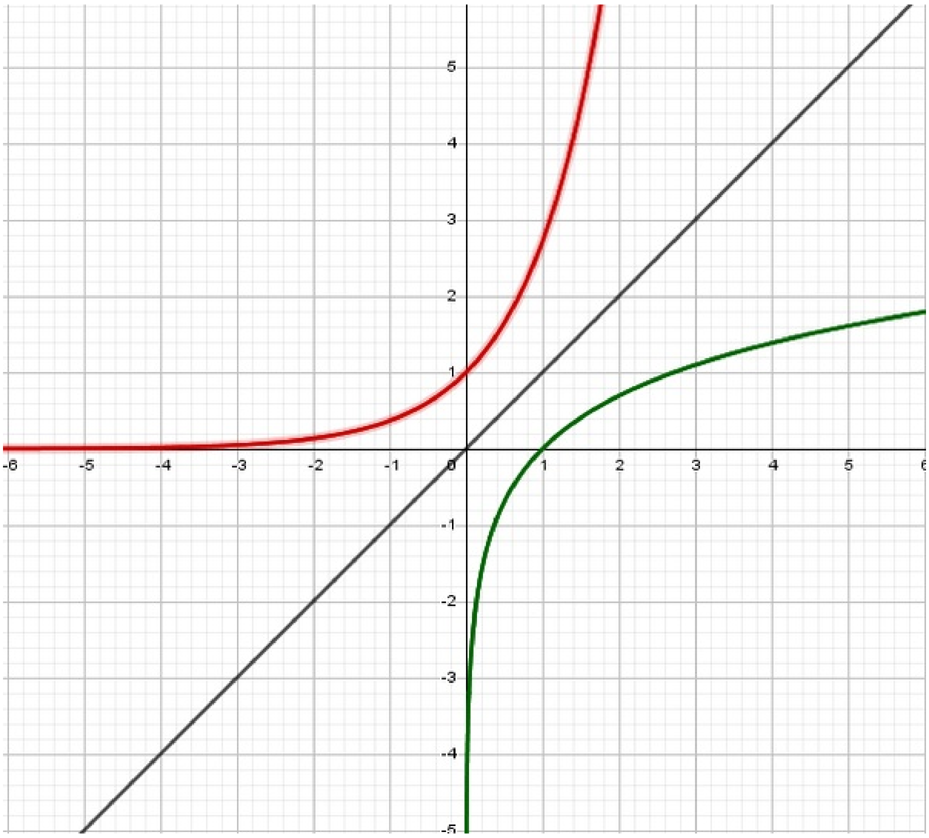
Pour tous réels x et y et por tout nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$ on a :
$e^x \times e^y = e^{x+y}$
$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
$(e^x)^r = e^{xr}$

1-5/ Courbe représentative de la fonction exponentielle

On a vu que la fonction exponentielle népérienne est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

Donc la courbe de la fonction exp notée $\mathscr{C}_{exp}$ et la courbe de la fonction $\ln$ notée $\mathscr{C}_{\ln}$ sont symétriques par rapport a la droite (D) d'équation $y = x$,bien entendu, dans un repère orthonormal

La figure ci-dessous donne les représentations graphiques des deux fonctions :



I- Fonction exponentielle népérienne

1-6/ Limites usuelles

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \ (n \in \mathbb{N}^*)$$
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \ (n \in \mathbb{N}^*)$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

1-7/ Dérivée de la fonction exponentielle

Propriété

la fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})\ (e^x)' = e^x$.

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Alors $x \mapsto e^x$ est dérivable sur I et $(\forall x \in \mathbb{R})\ \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$

Remarque

Soit U une fonction dérivable sur un intervalle I.

Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + \lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Exemple

II- Exponentielle de base a

2-1/ Définition

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction exp_a qui à tout réel x associe le réel a^x tel que $exp_a(x) = a^x = e^{x\ln(a)}$.

Remarque

L'ensemble de définition de a^x est $\mathbb{R}$, l'exigence de stricte positivité et différent de 1 ne porte que sur a et l'égalité $a^x = e^{x\ln(a)}$ permet de comprendre pourquoi (condition d'existence d'un logarithme).

Lorsque $a = e$, on retrouve la fonction exp.

Pour tout réel strictement positif a et différent de 1, et pour tout réel x, on a $a^x > 0$

Pour tout réel strictement positif a et différent de 1, et pour tout réel x, on a $\ln(a^x) = x\ln(a)$

Exemple

2-2/ Propriété

Pour tous nombres réel strictement positifs a et b, et pour tous réel x et y on a :

$a^0 = 1 \quad ; \quad a^1 = a \quad ; \quad a^x \times a^y = a^{x+y}$
$a^x \times b^x = (a \times b)^x \quad ; \quad (a^x)^y = a^{xy}$
$\frac{a^x}{a^y} = a^x - y \quad ; \quad \frac{1}{a^x} = a^{-x}$

II- Exponentielle de base a

2-3/ Dérivée de la fonction exponentielle de base a

Propriété

Soit a un réel strictement positif.

La fonction exponentielle de base a est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et pour tout réel x on a :

$$(a^x)' = e^{x\ln(a)} = \ln(a).a^x$$

Exemple

2-4/ Tableau de variations

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

Cas 1 : $0 < a < 1$

Alors, $\ln(a) < 0$ d'où $\left(a^x\right)' < 0$, donc la fonction $x \mapsto a^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln(a)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln(a)} = +\infty$.

x	$+\infty$	$-\infty$
$(a^x)'$	$-$	
a^x	$+\infty$	

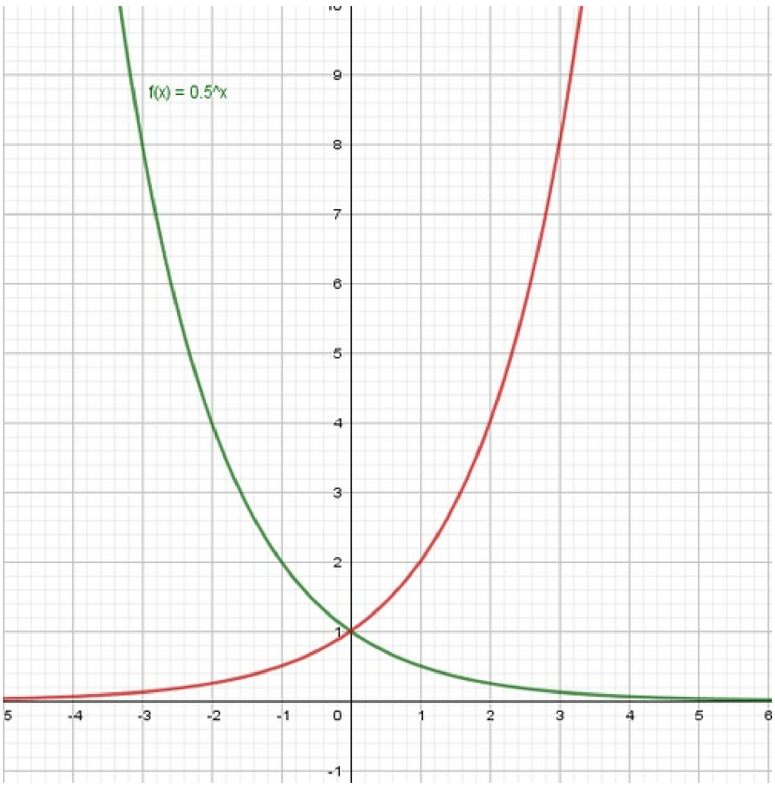
Cas 2 : $a > 1$

Alors, $\ln(a) > 0$ d'où $\left(a^x\right)' > 0$, donc la fonction $x \mapsto a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln(a)} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln(a)} = 0$.

x	$+\infty$	$-\infty$
$(a^x)'$	$+$	
a^x		$+\infty$

2-5/ Les représentations graphiques de $x \mapsto 0,5^x$ et $x \mapsto 2^x$



III- Exercices

3-1/ Exercice 1

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction numérique g d'une variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g\left(x\right) = e^{x}\left(x - 1\right) + 1$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g'\left(x\right) = xe^{x}$.
2. Étudier le signe de $g'\left(x\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Calculer $g\left(0\right)$ et dresser le tableau de variations de g (le calcul de limites n'est pas demandé).
4. Déduire que $g\left(x\right) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie B - Étude de la fonction

Soit $f$la fonction numérique d'une variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f\left(x\right) = xe^{x} - 2e^{x} + x$$

On appelle $\left(C_{f}\right)$ la courbe représentative de dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ d'unité graphique $2cm$.

5. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f\left(x\right) = +\infty$
6. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.
7. Montrer que $\lim_{x \to -\infty} f\left(x\right) = -\infty$ (on rappelle que $\lim_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$)
8. Montrer que $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et que $\lim_{x \to -\infty} \left(f\left(x\right) - x\right) = 0$, puis interpréter géométriquement ce résultat.
9. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'\left(x\right) = g\left(x\right)$.
10. Déduire le signe de $f'\left(x\right)$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de f.
11. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α telle que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.
12. Montrer que $f''\left(x\right) = xe^{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et en déduire que la courbe $\left(C_{f}\right)$ admet un point d'inflexion $I(0\ ; -2)$.

3-2/ Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f\left(x\right) = x - 2 - e^{-x}$

1. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f\left(x\right)$.
2. Montrer que la droite $\left(\Delta\right)\ :\ y = x - 2$ est une asymptote oblique à $\left(C_{f}\right)$ quand $x \to +\infty$.
3. Vérifier que $f\left(x\right) = x\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{xe^{x}}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$*.
4. Déduire $\lim_{x \to -\infty} f\left(x\right)$ puis interpréter le résultat.

5. Étudier la position relative de $\left(C_f\right)$ et la droite (Δ) : $y = x - 2$.
6. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
7. Donner le tableau de variations de f.
8. Tracer $\left(C_f\right)$.

3-3/ Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)^2 e^x$
soit $\left(C_f\right)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.
3. Vérifier que $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 x^2 e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
4. Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ puis interpréter géométriquement le résultat.
5. Montrer que $f'(x) = \left(x^2 - 1\right) e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
6. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f(-1)$ et $f(1)$ et dresser le tableau de variation de f.
7. Montrer que F définie par $F(x) = \left(x^2 - 4x + 5\right) e^x$ est une fonction primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
8. tracer $\left(C_f\right)$
9. Déterminer géométriquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.

3-4/ Exercice 4

Partie I

Soit la fonction numérique g d'une variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = 2 + xe^x$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.
2. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis déduire le signe.
3. En déduire que $g(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Partie II

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 2x + (x-1)e^x$

Et soit $\left(C_f\right)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

4. Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right) - 2x = 0$, puis interpréter géométriquement le résultat.
5. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter géométriquement le résultat.
6. Étudier la position relative de la droite $(\mathit{\Delta}) :\ y = 2x$ et $\left(C_f\right)$.
7. Montrer que $f'\left(x\right) = g\left(x\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
8. Étudier le signe de $f'\left(x\right)$ puis donner le tableau de variation de la fonction f.
9. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
10. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α tel que $0 < \alpha < 1$.
11. Tracer $\left(C_f\right)$ et $(\mathit{\Delta})$.