



Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

Séance 10 (Fonctions exponentielles)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Fonction exponentielle népérienne

1-1/ Définition

1-2/ Conséquence

1-3/ Propriétés

1-4/ Propriétés algébriques

1-5/ Courbe représentative de la fonction exponentielle

1-6/ Limites usuelles

1-7/ Dérivée de la fonction exponentielle

II- Exponentielle de base a

2-1/ Définition

2-2/ Propriété

2-3/ Étude de la fonction exponentielle de base a

2-4/ Dérivée de la fonction exponentielle de base a

2-5/ Tableau de variations

2-6/ Courbes

III- Exercices

3-1/ Exercice 1

3-2/ Exercice 2

3-3/ Exercice 3

3-4/ Exercice 4

I- Fonction exponentielle népérienne

1-1/ Définition

On appelle fonction exponentielle népérienne notée Exp , la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\rightarrow]0, +\infty[\\ x &\rightarrow \exp(x) \end{aligned}$$

1-2/ Conséquence

- Les fonctions $\ln$ et $\exp$ sont des fonctions réciproques l'une de l'autre, pour tout $x > 0$ et pour tout réel y :

$$\ln(x) = y \Leftrightarrow \exp(y) = x$$

- Pour tout réel x on écrit aussi : $\forall x \in \mathbb{R}$:

Exemple

1-3/ Propriétés

$$\begin{aligned} e^0 &= 1 \text{ et } e^1 = e \\ e^{-1} &= \frac{1}{e^1} \text{ et } \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; \ln(e^x) = x$$

$$(\forall x > 0) ; e^{\ln x} = x$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y > 0) ; \ln y = x \Leftrightarrow e^x = y$$

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) ; e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) ; e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$$

1-4/ Propriétés algébriques

Pour tous réels x et y et pour tout nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$ on a :

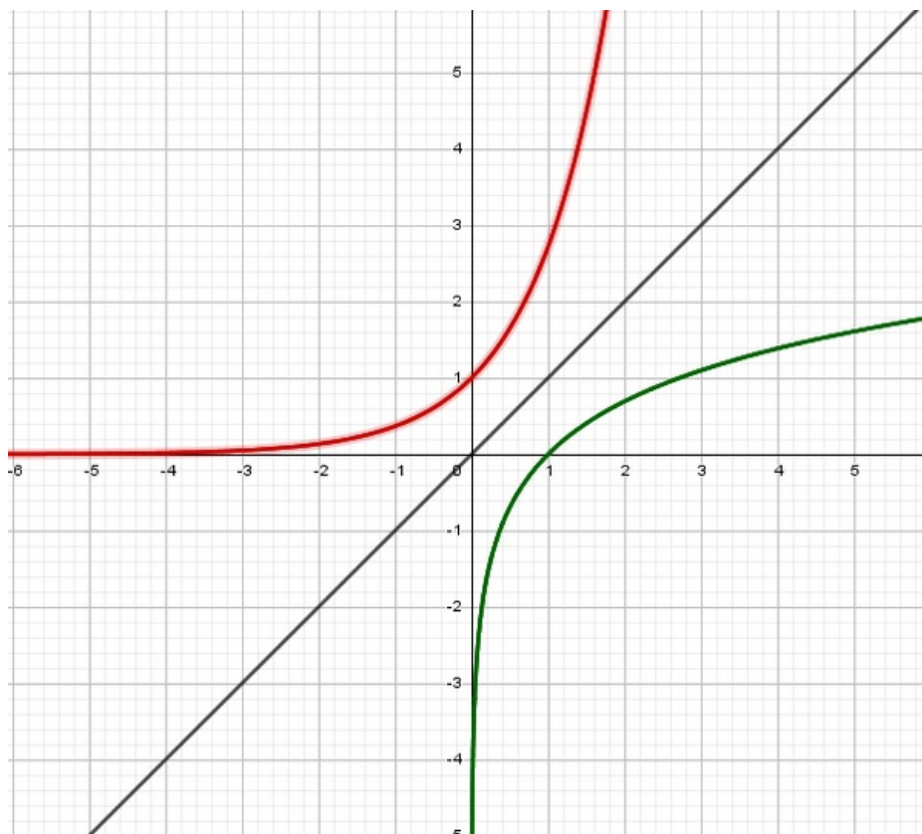
$$\begin{aligned} e^x \times e^y &= e^{x+y} \\ e^{-x} &= \frac{1}{e^x} \\ \frac{e^x}{e^y} &= e^{x-y} \\ (e^x)^r &= e^{xr} \end{aligned}$$

1-5/ Courbe représentative de la fonction exponentielle

On a vu que la fonction exponentielle népérienne est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

Donc la courbe de la fonction $\exp$ notée $\mathcal{C}_{\exp}$ et la courbe de la fonction $\ln$ notée $\mathcal{C}_{\ln}$ sont symétriques par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$, bien entendu, dans un repère orthonormal

La figure ci-dessous donne les représentations graphiques des deux fonctions :



I- Fonction exponentielle népérienne

1-6/ Limites usuelles

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} &= +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x &= 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \end{aligned}$$

1-7/ Dérivée de la fonction exponentielle

Propriété

la fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R}) (e^x)' = e^x$.

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Alors $x \mapsto e^x$ est dérivable sur I et $(\forall x \in \mathbb{R}) (e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)}$

Remarque

Soit U une fonction dérivable sur un intervalle I .

Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto u'(x) e^{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

Exemple

II- Exponentielle de base a

2-1/ Définition

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

On appelle fonction exponentielle de base a , la fonction $\exp_a$ qui à tout réel x associe le réel a^x tel que $\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln(a)}$.

Remarque

L'ensemble de définition de a^x est $\mathbb{R}$, l'exigence de stricte positivité et différent de 1 ne porte que sur a et l'égalité $a^x = e^{x \ln(a)}$ permet de comprendre pourquoi (condition d'existence d'un logarithme).

Lorsque $a = e$, on retrouve la fonction $\exp$.

Pour tout réel strictement positif a et différent de 1, et pour tout réel x , on a $a^x > 0$

Pour tout réel strictement positif a et différent de 1, et pour tout réel x , on a $\ln(a^x) = x \ln(a)$

Exemple

2-2/ Propriété

Pour tous nombres réel strictement positifs a et b , et pour tous réel x et y on a :

$$a^0 = 1 \quad ; \quad a^1 = a \quad ; \quad a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$a^x \times b^x = (a \times b)^x \quad ; \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad ; \quad \frac{1}{a^x} = a^{-x}$$

II- Exponentielle de base a

2-3/ Dérivée de la fonction exponentielle de base a

Propriété

Soit a un réel strictement positif.

La fonction exponentielle de base a est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et pour tout réel x on a :

$$(a^x)' = e^{x \ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x$$

Exemple

2-4/ Tableau de variations

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

Cas 1 : $0 < a < 1$

Alors, $\ln(a) < 0$ d'où $(a^x)' < 0$, donc la fonction $x \mapsto a^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(a)} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln(a)} = +\infty$.

x	$+\infty$	$-\infty$
$(a^x)'$	-	
a^x	$+\infty$	→

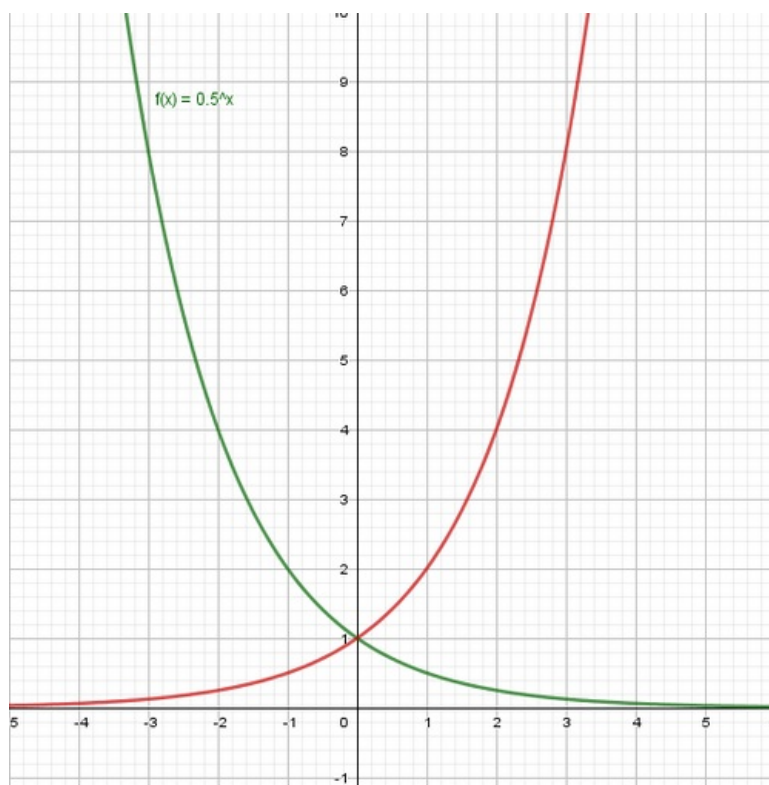
Cas 2 : $a > 1$

Alors, $\ln(a) > 0$ d'où $(a^x)' > 0$, donc la fonction $x \mapsto a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(a)} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln(a)} = 0$.

x	$+\infty$	$-\infty$
$(a^x)'$	+	
a^x	→	$+\infty$

2-5/ Les représentations graphiques de $x \mapsto 0,5^x$ et $x \mapsto 2^x$



III- Exercices

3-1/ Exercice 1

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction numérique g d'une variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x (x - 1) + 1$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g'(x) = xe^x$.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Calculer $g(0)$ et dresser le tableau de variations de g (le calcul de limites n'est pas demandé).
4. Dédire que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie B - Étude de la fonction

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^x - 2e^x + x$$

On appelle (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique $2cm$.

5. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
6. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.
7. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (on rappelle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$)
8. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$, puis interpréter géométriquement ce résultat.
9. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = g(x)$.
10. Dédire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de f .
11. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α telle que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.
12. Montrer que $f''(x) = xe^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et en déduire que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion $I(0; -2)$.

3-2/ Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 2 - e^{-x}$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Montrer que la droite $(\Delta) : y = x - 2$ est une asymptote oblique à (C_f) quand $x \rightarrow +\infty$.
3. Vérifier que $f(x) = x \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{xe^x}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
4. Dédire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis interpréter le résultat.
5. Étudier la position relative de (C_f) et la droite $(\Delta) : y = x - 2$.
6. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
7. Donner le tableau de variations de f .
8. Tracer (C_f) .

3-3/ Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x - 1)^2 e^x$

soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.
3. Vérifier que $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 x^2 e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
4. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ puis interpréter géométriquement le résultat.
5. Montrer que $f'(x) = (x^2 - 1)e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
6. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f(-1)$ et $f(1)$ et dresser le tableau de variation de f .
7. Montrer que F définie par $F(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$ est une fonction primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
8. tracer (C_f)
9. Déterminer géométriquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.

3-4/ Exercice 4

Partie I

Soit la fonction numérique g d'une variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 + xe^x$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
2. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis déduire le signe.
3. En déduire que $g(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Partie II

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + (x-1)e^x$

Et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x = 0$, puis interpréter géométriquement le résultat.
5. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter géométriquement le résultat.
6. Étudier la position relative de la droite $(\Delta) : y = 2x$ et (C_f) .
7. Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
8. Étudier le signe de $f'(x)$ puis donner le tableau de variation de la fonction f .
9. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
10. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α tel que $0 < \alpha < 1$.
11. Tracer (C_f) et (Δ) .