

Sommaire

## I- Écriture exponentielle d'un nombre complexe non nul

1-1/ Définition

1-2/ Formules d'EULER

1-3/ Application (La linéarisation)

## II- Équation du deuxième degré

2-1/ Équation de la forme  $z^2 = a$  ; ( $z \in \mathbb{C}$ ) ( $a \in \mathbb{R}$ )2-2/ Équation de la forme  $az^2 + bz + c = 0$  ; ( $z \in \mathbb{C}$ ) ( $a \in \mathbb{R}^*$ ) ( $b, c \in \mathbb{R}$ )

## III- Écriture complexe des transformations (translation – homothétie – rotation)

3-1/ Écriture complexe d'une translation

3-2/ Écriture complexe d'une homothétie

3-3/ Écriture complexe d'une rotation

## IV- La géométrie plane et les nombres complexes

## V- Exercices

5-1/ Exercice 1

5-2/ Exercice 2

5-3/ Exercice 3

5-4/ Exercice 4

5-5/ Exercice 5

5-6/ Exercice 6

## I- Écriture exponentielle d'un nombre complexe non nul

1-1/ Définition

L'écriture trigonométrique  $z = [r, \alpha] = [|z|, \arg z]$  sera notée de la manière suivante :

$$z = [r, \alpha] = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = re^{i\alpha}$$

$z = re^{i\alpha}$  s'appelle l'écriture exponentielle ou la forme exponentielle de  $z$  non nul

## Propriétés

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} (e^{i\alpha})^n &= e^{in\alpha} \\ \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} &= e^{i(\alpha-\beta)} \\ \frac{1}{e^{i\beta}} &= e^{-i\beta} \\ e^{i\alpha} \times e^{i\beta} &= e^{i(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

## 1-2/ Formules d'EULER

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$

On pose  $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$   $z = [1, \alpha] = \cos \alpha + i \sin \alpha$  un nombre complexe de module 1 et d'argument  $\alpha$ .

Donc  $z = \cos \alpha + i \sin \alpha = re^{i\alpha}$

Les formules d'Euler :

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} e^{in\alpha} + e^{-in\alpha} &= z^n + (\bar{z})^n = 2 \cos n\alpha \\ e^{in\alpha} - e^{-in\alpha} &= z^n - (\bar{z})^n = 2i \sin n\alpha \\ e^{in\alpha} \times e^{-in\alpha} &= z^n \times (\bar{z})^n = 1 \end{aligned}$$

## 1-3/ Application (La linéarisation)

On linéarise  $\cos^3 x$ .

## II- Équation du deuxième degré

### 2-1/ Équation de la forme $z^2 = a$ ; ( $z \in \mathbb{C}$ ) ( $a \in \mathbb{R}$ )

Soit  $a \in \mathbb{R}$

L'ensemble des solutions de l'équation  $z \in \mathbb{C} : z^2 = a$  est :

- Si  $a = 0$  alors  $S = \{0\}$ .
- Si  $a > 0$  alors  $S = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$ .
- Si  $a < 0$  alors  $S = \{i\sqrt{-a}, -i\sqrt{-a}\}$ .

### Exemple

### 2-2/ Équation de la forme $az^2 + b\bar{z} + c = 0$ ; ( $z \in \mathbb{C}$ ) ( $a \in \mathbb{R}^*$ ) ( $b, c \in \mathbb{R}$ )

$\Delta = b^2 - 4ac$  a pour solutions :

- Si  $\Delta = 0$  alors l'équation a une solution double  $z = \frac{-b}{2a}$
- Si  $\Delta > 0$  alors l'équation à deux solutions réelles  $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

- Si  $\Delta < 0$  alors l'équation a deux solutions complexes conjuguées  $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ .

### III- Écriture complexe des transformations (translation – homothétie – rotation)

#### 3-1/ Écriture complexe d'une translation

L'écriture complexe de la translation  $f = t_{\vec{u}}$  de vecteur  $\vec{u}$  d'affixe le complexe  $b$  est  $z' - z = b$  ou bien  $z' = z + b$ .

Toute transformation  $f$  dans le plan complexe qui transforme  $M_{(z)}$  au point  $M'_{(z')}$  tel que :  $z' = z + b$  est une translation de vecteur  $\vec{u}$  d'affixe le complexe  $b$ .

#### 3-2/ Écriture complexe d'une homothétie

L'écriture complexe de l'homothétie  $f = h(\Omega, k)$  de centre le point  $\Omega$  et de rapport  $k \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$  est  $z' - \omega = k(z - \omega)$  ou bien  $z' = kz + b$  avec  $b = \omega - k$  ( $\omega \in \mathbb{C}$ ).

Toute transformation  $f$  dans le plan complexe qui transforme  $M_{(z)}$  au point  $M'_{(z')}$  tel que :  $z' = kz + b$  est une homothétie :

- De centre le point  $\Omega_{(\omega)}$ ,  $\Omega$  est un point invariant par  $f$  c.à.d.  $f(\Omega) = \Omega$  ou  $\omega = k\omega + b$ , d'où  $\omega = \frac{b}{1-k}$

- De rapport  $k \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ .

#### 3-3/ Écriture complexe d'une rotation

L'écriture complexe de la rotation  $f = r(\Omega, \theta)$  de centre le point  $\Omega$  et d'angle  $\theta$  est  $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$  ou bien  $z' = ze^{i\theta} + b$  avec  $b = \omega - \omega e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ .

Toute transformation  $f$  dans le plan complexe qui transforme  $M_{(z)}$  au point  $M'_{(z')}$  tel que  $z' = kz + b$  avec  $a \neq 1$  et  $|a| = 1$  (ou  $z' = ze^{i\theta} + b$ ) est une rotation :

- De centre le point  $\Omega_{(\omega)}$ ,  $\Omega$  est un point invariant par  $f$  c.à.d.  $\omega = a\omega + b$  (ou  $\omega = e^{i\theta}\omega + b$ ), d'où :  $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{b}{1-e^{i\theta}}$ .

- D'angle  $\arg(a)$  ( $2\pi$ ) (ou  $\theta = \arg(e^{i\theta})$  ( $2\pi$ )) ou encore  $\theta = \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right)$  ( $2\pi$ ).

### IV- La géométrie plane et les nombres complexes

Relation complexe	Signification géométrique
L'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tel que $ z - z_A  =  z - z_B $	$AM = BM$ . $M$ appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ . L'ensemble des points $M$ est la médiatrice du segment $[AB]$ .
$ z - z_A  = k$ ( $k > 0$ )	$AM = k$ . $M$ appartient au cercle de centre $A$ et de rayon $k$ .

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[ r; \pm \frac{\pi}{2} \right] = r e^{\pm \frac{\pi}{2} i}$	Si $r \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ , alors $ABC$ est un triangle rectangle en $A$ . Si $r = 1$ , alors $ABC$ est un triangle rectangle et isocèle en $A$ .
$\left  \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right  = 1$	$ABC$ est un triangle isocèle en $A$ .
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[ 1; \pm \frac{\pi}{3} \right] = e^{\pm \frac{\pi}{3} i}$	$ABC$ est un triangle équilatéral.

## V- Exercices

### 5-1/ Exercice 1

- Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation  $z^2 - z\sqrt{2} + 2 = 0$ .  
On considère le nombre complexe  $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$ .
- Montrer que le module de  $u$  est  $\sqrt{2}$  et que  $\arg(u) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ .
- En utilisant l'écriture de  $u$  sous forme trigonométrique, montrer que  $u^6$  est un nombre réel.

Dans le plan complexe  $(P)$  rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les

points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $a = 4 - 4i\sqrt{3}$  et  $b = 8$ .

Soit  $z$  l'affixe du point  $M$  et  $z'$  l'affixe du point  $M'$ , l'image de  $M$  par la rotation  $R$  de centre le point  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

- Exprimer  $z'$  en fonction de  $z$ .
- Vérifier que le point  $B$  est l'image du point  $A$  par la rotation  $R$ , et en déduire que le triangle  $OAB$  est équilatéral.

### 5-2/ Exercice 2

- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation  $z^2 - 4z + 5 = 0$   
Dans le plan complexe  $(P)$  rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B, C, D$  et  $\Omega$  d'affixes respectives  $a = 2 + i$ ,  $b = 2 - i$ ,  $c = i$ ,  $d = -i$  et  $\omega = 1$ .

- Montrer que  $\frac{a-\omega}{b-\omega} = i$ .
- En déduire que le triangle  $\Omega AB$  est rectangle isocèle en  $\Omega$ .

Soit  $z$  l'affixe du point  $M$  et  $z'$  l'affixe du point  $M'$ , l'image de  $M$  par la rotation  $R$  de centre le point  $\Omega$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

- Montrer que  $z' = iz + 1 - i$ .
- Vérifier que  $R(A) = C$  et  $R(D) = B$ .
- Montrer que les points  $A, B, C$  et  $D$  appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre.

### 5-3/ Exercice 3

On considère le nombre complexe  $a$  tel que :  $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ .

1. Montrer que le module de  $a$  est  $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ .
2. Vérifier que  $a = 2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{4}\right) + 2i \sin \frac{\pi}{4}$ .
3. Par la linéarisation de  $\cos^2 \theta$  tel que  $\theta$  est un nombre réel, montrer que  $1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta$ .
4. Montrer que  $a = 4 \cos^2 \frac{\pi}{8} + 4i \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$  (on rappelle que  $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$ ).
5. Montrer que  $4 \cos \frac{\pi}{8} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}\right)$  est la forme trigonométrique du nombre  $a$  puis montrer que  $a^4 = \left(2\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)^4 i$ .

Dans le plan complexe  $(P)$  rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $\Omega$  et  $A$  d'affixes respectives  $\omega = \sqrt{2}$  et  $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ , et la rotation  $R$  de centre le point  $\Omega$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

6. Montrer que l'affixe  $b$  du point  $B$  est l'image du point  $A$  par la rotation  $R$  est égale à  $2i$ .
7. Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  qui vérifient  $|z - 2i| = 2$ .

### 5-4/ Exercice 4

1. Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation :  $z^2 + 10z + 26 = 0$ .

Dans le plan complexe  $(P)$  rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B, C$  et  $\Omega$  d'affixes respectives  $a = -2 + 2i$ ,  $b = -5 + i$ ,  $c = -5 - i$  et  $\omega = -3$ .

2. Montrer que  $\frac{b-\omega}{a-\omega} = i$ .
3. En déduire la nature du triangle  $\Omega AB$ .

Soit le point  $D$  l'image du point  $C$  par la translation  $T$  de vecteur  $\vec{u}$  d'affixe  $6 + 4i$ .

4. Montrer que l'affixe  $d$  du point  $D$  est  $1 + 3i$ .
5. Montrer que  $\frac{b-d}{a-d} = 2$ , puis en déduire que le point  $A$  est le milieu du segment  $[BD]$ .

### 5-5/ Exercice 5

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 - 12z + 61 = 0$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a = 6 - 5i$ ,  $b = 4 - 2i$  et  $c = 2 + i$ .

2. Calculer  $\frac{a-c}{b-c}$ , et en déduire que  $A, B$  et  $C$  sont alignés.

On considère la translation  $T$  de vecteur  $\vec{u}$  d'affixe  $1 + 5i$ .

3. Vérifier que l'affixe du point  $D$  image du point  $C$  par la translation  $T$  est  $d = 3 + 6i$ .
4. Montrer que  $\frac{d-c}{b-c} = -1 + i$ , et que  $\frac{3\pi}{4}$  est un argument de  $-1 + i$ .
5. En déduire une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD})$ .

### 5-6/ Exercice 6

On considère les nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que  $a = \sqrt{3} + i$  et  $b = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$ .

1. Vérifier que :  $b = (1 + i)a$
2. En déduire que  $|b| = 2\sqrt{2}$ , et que  $\arg b = \frac{5\pi}{12} [2\pi]$ .
3. Déduire de ce qui précède que  $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ .

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $a$  et  $b$  et le point  $C$  d'affixe  $c = -1 + i\sqrt{3}$ .

4. Vérifier que  $c = ia$ , et en déduire que  $OA = OC$  et que  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .
5. Montrer que le point  $B$  est l'image du point  $A$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{OC}$ .
6. En déduire que le quadrilatère  $OABC$  est un carré.