

SommaireI- La fonction exponentielle népérienne $f(x) = e^x$

1-1/ Définition

1-2/ Conséquences

1-3/ Propriétés

II- Propriétés algébriques

III- Limites

IV- Dérivée des fonctions $f(x) = e^x$ et $f(x) = e^{u(x)}$

4-1/ Théorème 1

4-2/ Théorème 2

V- Étude de la fonction $f(x) = e^x$ VI- Fonction exponentielle de base a avec $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$

6-1/ Définition

6-2/ Remarques

6-3/ Conséquences

6-4/ Propriétés

6-5/ La courbe représentative de $f(x) = a^x$ avec $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$

VII- Exercices

7-1/ Exercice 1

7-2/ Exercice 2

7-3/ Exercice 3

7-4/ Exercice 4

7-5/ Exercice 5

7-6/ Exercice 6

I- La fonction exponentielle népérienne $f(x) = e^x$

1-1/ Définition

La fonction f définie par $\begin{cases} f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow f(x) = \ln x \end{cases}$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ d'où f admet une fonction réciproque f^{-1} .

On l'appelle fonction exponentielle népérienne et on la note par $f^{-1} = \exp$ ou $f^{-1} = e$ avec :

$$\begin{cases} f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[\\ x \rightarrow f^{-1}(x) = \exp(x) \end{cases}$$

1-2/ Conséquences

La fonction exponentielle népérienne $f^{-1} = \exp$ ou $f^{-1} = e$ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} , et la courbe de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la 1ère bissectrice (la droite d'équation $y = x$).

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : e^x > 0$$

La relation entre $f(x) = \ln(x)$ et $f^{-1} = e^x$ est $\begin{pmatrix} e^x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = \ln y \\ y > 0 \end{pmatrix}$.

1-3/ Propriétés

$$\begin{pmatrix} e^x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = \ln y \\ y > 0 \end{pmatrix}.$$

$$\forall x > 0 : e^{\ln x} = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ln(e^x) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a > b \Leftrightarrow e^a > e^b$$

II- Propriétés algébriques

Soient $a, b, x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$.

On a :

$$\begin{aligned} e^{a+b} &= e^a \times e^b \\ e^{-b} &= \frac{1}{e^b} \\ e^{a-b} &= \frac{e^a}{e^b} \\ (e^x)^r &= e^{rx} \end{aligned}$$

$$\sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\sqrt[n]{e^x} = e^{\frac{1}{n}x}$$

III- Limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

IV- Dérivée des fonctions $f(x) = e^x$ et $f(x) = e^{u(x)}$

4-1/ Théorème 1

La fonction $f(x) = e^x$ est dérivable sur \mathbb{R} , et on a : $\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = e^x$.

Preuve

4-2/ Théorème 2

Si la fonction $u(x)$ est dérivable sur un intervalle I , alors la fonction $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est :
 $f'(x) = [e^{u(x)}]' = u'(x)e^{u(x)}$.

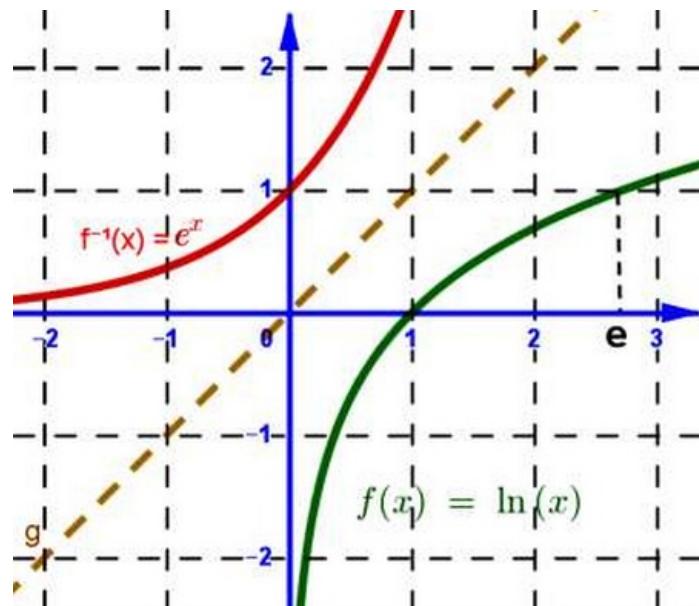
Exemples

V- Étude de la fonction $f(x) = e^x$

Le tableau de variation de f :

| | | |
|------|-----------|----------------------|
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
| f' | + | |
| f | 0 | \nearrow $+\infty$ |

La courbe représentative de f :



VI- Fonction exponentielle de base a avec $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$

6-1/ Définition

Soit $a \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

La fonction définie par : $\forall x > 0 ; \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln a}$ est continue et strictement monotone sur $]0; +\infty[$.

Donc elle admet une fonction réciproque f^{-1} , on l'appelle fonction exponentielle de base a et elle est définie par :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow]0; +\infty[\\ x &\rightarrow f^{-1}(x) = \exp_a(x) \end{aligned}$$

Exemple

6-2/ Remarques

$$\forall x \in \mathbb{R} ; e^{x \ln a} = a^x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \log_a(a^x) = x$$

$$\forall x > 0 ; a^{\log_a(x)} = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; 10^x = y \Leftrightarrow x = \log(y)$$

6-3/ Conséquences

Soit $a \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$ et la fonction $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$

La fonction f est continue et dérivable sur l'intervalle \mathbb{R} .

$$f'(x) = (a^x)' = \ln a \times e^{x \ln a} = \ln a \times a^x$$

D'où le signe de $f'(x)$ est le signe de $\ln a$.

Si $0 < a < 1$, alors $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ est strictement croissante, d'où :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$$

Si $a > 1$, alors $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ est strictement décroissante, d'où :
 $\forall x, y \in \mathbb{R} : a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$

6-4/ Propriétés

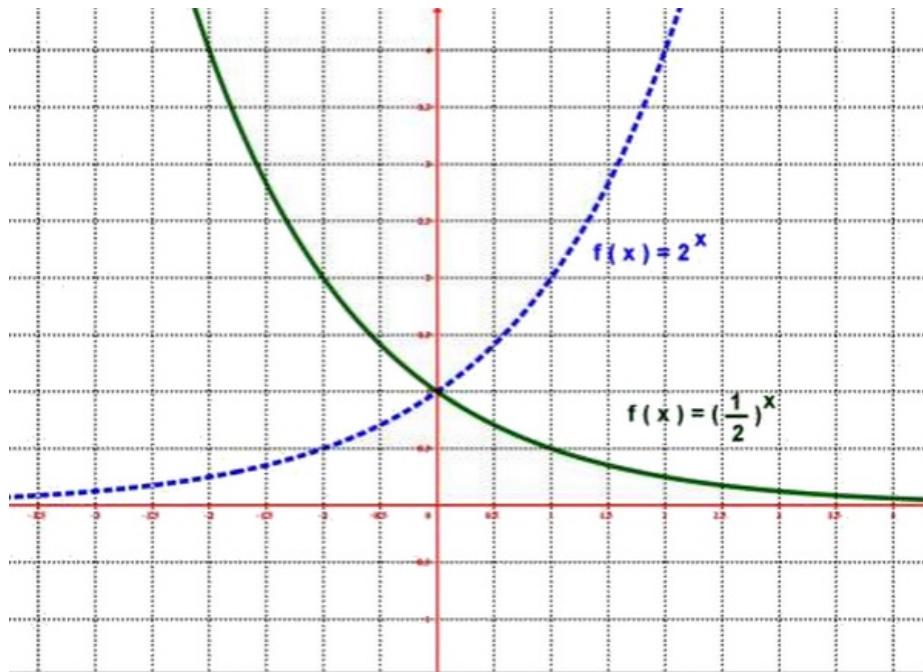
Soit $a \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$ et $x, y \in \mathbb{R}$

On a :

$$\begin{aligned} a^x \times a^y &= a^{x+y} \\ (a^x)^y &= a^{xy} \\ \frac{1}{a^x} &= a^{-x} \\ \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} \end{aligned}$$

Exemples

6-5/ La courbe représentative de $f(x) = a^x$ avec $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$



VII- Exercices

7-1/ Exercice 1

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A &= (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 \\ B &= (e^x - 1)^2 (e^{2x} + 2e^x + 1) \end{aligned}$$

2. Montre que pour tout x de \mathbb{R} on a :

$$\begin{aligned} \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} &= \frac{1-e^{-x}}{e^x+1} \\ \frac{1}{e^x+1} &= \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} \end{aligned}$$

3. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad & e^{2x} + e^x - 2 = 0 \\
 \textcircled{2} \quad & e^{2x+1} + e^{x+1} - 2e = 0 \\
 \textcircled{3} \quad & e^x - 2e^{-x} + 1 = 0
 \end{aligned}$$

4. Résolvez dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad & e^{2x} + e^x - 2 < 0 \\
 \textcircled{2} \quad & e^{2x} + 2e^x - 3 \geq 0 \\
 \textcircled{3} \quad & \frac{e^x - 1}{e^x - 2} \geq 0
 \end{aligned}$$

7-2/ Exercice 2

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (e^{-x} - 1)^2$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité: 2cm)

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.
2. Montrer que l'axe des ordonnées est une direction parabolique de (C_f) au voisinage de $-\infty$.
3. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 2e^{-x}(1 - e^{-x})$
4. Dresser le tableau de variation de f .
5. Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion .

Soit g la restriction de la fonction f sur $[0, +\infty[$

6. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
7. Montrer que : $(\forall x \geq 0) ; g^{-1}(x) = -\ln(1 - \sqrt{x})$
8. Tracer (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

7-3/ Exercice 3

Partie 1

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = e^x - 2x + 2$

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire les variations de la fonction g (le calcul des limites n'est pas demandé).
3. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = xe^{-x} + \frac{x}{2} + 1$

4. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat graphiquement.
5. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\frac{1}{2}x + 1)]$ et interpréter le résultat graphiquement.
6. Étudier les positions relatives de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$.
7. Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{2e^x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
8. Dresser le tableau de variations de f .
9. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-1; 0[$.
10. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.
11. Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis déterminer le point d'inflexion de la courbe (C_f) .
12. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. (On prend $e \approx 2,7$ et $\frac{2}{e^2} \approx 0,27$).

7-4/ Exercice 4

Partie 1

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = e^x - x - 1$

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis étudier les variations de la fonction g .
2. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
3. Montrer que $(\forall x > 0) ; \frac{e^x - 1}{x} > 1$ et que $(\forall x < 0) ; \frac{e^x - 1}{x} < 1$.
4. Montrer que $g(-x) = e^{-x} [1 + (x - 1)e^x]$.
5. Déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 1 + (x - 1)e^x \geq 0$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = x - 1 - \frac{x}{e^x - x - 1}$

6. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
7. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
8. Calculer $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f .
9. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
10. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x]$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
11. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-2; -1[$ et une solution unique β dans l'intervalle $]1; 2[$.

12. Déduire que $e^\alpha - \alpha - 1 = \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

13. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (On prends $\alpha = -1, 3$ et $\beta = 1, 6$)

Partie 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$

14) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$.

15) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

16) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

7-5/ Exercice 5

Partie I

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = 1 - (x+1)e^{-x}$

1. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) g'(x) = xe^{-x}$

2. Montrer que g est croissante sur $[0; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty; 0]$.

3. Calculer $g(0)$ et en déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) \geq 0$.

Partie II

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x - 1 + (x+2)e^{-x}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

(unité : 2 cm)

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$, et montrer que (C) est au-dessus de (D) sur $[-2; +\infty[$ et en dessous de (D) sur $]-\infty; -2]$.

3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.

4. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = g(x)$

5. Dresser le tableau de variations de f .

6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans \mathbb{R} , et en admettant que $e\sqrt{e} < 5$ montrer que $-\frac{3}{2} < \alpha < -1$.

7. Montrer que $I(0, 1)$ est le point d'inflexion pour la courbe (C) .

8. Montrer que $y = 1$ est l'équation de la tangente au point $I(0, 1)$ à la courbe (C) .

9. Construire dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la droite (D) et la courbe (C) .
10. En utilisant une intégration par partie montrer que :

$$\int_0^1 (x+2)e^{-x} dx = 3 - \frac{4}{e}$$
11. Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C) et les droites d'équations $y = x - 1$ et $x = 0$ et $x = 1$.

7-6/ Exercice 6

Partie I

On considère la fonction g définie par : $g(x) = 1 - (x+1)e^x$

1. Dresser le tableau de variation de g .
2. Calculer $g(0)$.
3. En déduire le signe de $g(x)$.

Partie II

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x(1 - e^x)$

On désigne par (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. Montrer que la droite (D) : $y = x$ est une asymptote oblique à (\mathcal{C}_f) au voisinage de $-\infty$, et préciser la position relative de (D) et (\mathcal{C}_f) .
3. Montrer que (\mathcal{C}_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.
4. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = g(x)$
5. Dresser le tableau de variation de f .
6. Montrer que (\mathcal{C}_f) admet un point d'inflexion I dont on déterminera ses coordonnées.
7. Construire (D) et (\mathcal{C}_f) .

Partie III

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $-1 \leq u_n \leq 0$
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n) , puis en déduire qu'elle est convergente.
3. Calculer la limite de la suite (u_n) .