



## Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

### Séance 8 (Primitive d'une fonction numérique)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

#### Sommaire

#### I- Primitive d'une fonction sur un intervalle

##### 1-1 Définition

##### 1-2/ Proposition 1

##### 1-3/ Proposition 2

##### 2-3/ Proposition 3

#### II- primitives usuelles et opérations

#### III- Exercices

##### 3-1/ Exercice 1

##### 3-2/ Exercice 2

##### 3-3/ Exercice 3

##### 3-4/ Exercice 4

---

#### I- Primitive d'une fonction numérique sur un intervalle

##### 1-1 Définition

Soit  $f$  et  $F$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur  $I$  si  $F$  est dérivable sur  $I$  et  $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$

##### **Exemple**

##### 1-2/ Proposition 1

Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , alors  $f$  admet des primitives sur  $I$ .

##### 1-3/ Proposition 2

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

- Si  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur  $I$  alors les primitives de  $f$  sur  $I$  sont les fonctions  $x \rightarrow F(x) + c$ ; ( $c \in \mathbb{R}$ )

- soient  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$  ; il existe une seule fonction primitive  $G$  de  $f$  qui vérifie la condition  $G(x_0) = y_0$ .

### 1-4/ Proposition 3

$F$  et  $G$  sont les primitives respectivement de  $f$  et  $g$  sur  $I$ .

On a  $F + G$  est une primitive de  $f + g$  sur  $I$ .

Pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , on a  $\alpha F + \beta G$  est une primitive de  $\alpha f + \beta g$ .

## II- primitives usuelles et opérations

### 2-1/ Tableau des primitives usuelles

Les primitives $F$	Fonction $f$
$x \mapsto c$	$x \mapsto 0$
$x \mapsto ax + c$	$x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$
$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$
$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$
$x \mapsto -\frac{1}{x} + c$	$x \mapsto \frac{1}{x^2}$
$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N}^* \setminus \{-1\})$

### 2-2/ Fonctions primitives et opérations

Les primitives $F$	Fonction $f$
$\frac{1}{r+1}U^{r+1} + c$	$U' \times U^r \quad (r \in \mathbb{N})$
$-\frac{1}{U}$	$\frac{U'}{U^2} (U \neq 0)$
$2\sqrt{U}$	$\frac{U'}{\sqrt{U}} (U > 0)$
$\frac{-1}{(n-1)U^{n-1}}$	$\frac{U'}{U^n} (n \in \mathbb{N}^* \setminus \{-1\})$

## III- Exercices

### 3-1/ Exercice 1

Soit  $f$  et  $F$  deux fonctions numériques.

Montrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  dans les cas suivants :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} & \left( \begin{array}{l} F(x) = x^3 + \frac{1}{x} + 4 \\ f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2} \\ I = \mathbb{R}^* \end{array} \right) \\ \textcircled{2} & \left( \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \sqrt{x} + 4 \\ f(x) = x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ I = ]0, +\infty[ \end{array} \right) \\ \textcircled{3} & \left( \begin{array}{l} F(x) = \frac{(x^2+1)^3}{3} \\ f(x) = 2x(x^2+1)^2 \\ I = ]0, +\infty[ \end{array} \right) \end{aligned}$$

### 3-2/ Exercice 2

Soient  $f$  et  $F$  deux fonctions numériques définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{aligned} F(x) &= x^4 + x^3 + x^2 + 1 \\ f(x) &= 4x^3 + 3x^2 + 2x \\ I &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

1. Montrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminer  $G$  l'ensemble des primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Déterminer la primitive de  $f$  qui vérifie  $G(0) = 1$ .

### 3-3/ Exercice 3

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 4x^4 + 3x^3 + x ; I = \mathbb{R} \\ f_2(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 ; I = ]0, +\infty[ \\ f_3(x) &= 2x^5 - 3x^2 - 1 ; I = \mathbb{R} \\ f_4(x) &= \frac{1}{x^3} + \frac{2}{3x^5} ; I = \mathbb{R}^* \\ f_5(x) &= 2x(x^2 + 1)^3 ; I = \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_6(x) &= \frac{2x}{(x^2+1)^2} ; I = \mathbb{R} \\ f_7(x) &= \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} ; I = \mathbb{R} \\ f_8(x) &= x(x^2 + 1) ; I = \mathbb{R} \\ f_9(x) &= \frac{1}{x^2} \left( \frac{1}{x} - 1 \right)^3 ; I = \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

### 3-4/ Exercice 4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1; 1[$  par :  $f(x) = \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

1. Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $f(x) = \frac{ax}{(x^2-1)^2} - \frac{b}{(x-1)^2}$ .
2. En déduire toutes les primitives de  $f$  sur  $] -1; 1[$ .
3. Déterminer la primitive  $F$  de la fonction  $f$  qui vérifie  $F(0) = 1$ .