

Sommaire**I- Primitive d'une fonction sur un intervalle****1-1 Définition****1-2/ Proposition 1****1-3/ Proposition 2****2-3/ Proposition 3****II- primitives usuelles et opérations****III- Exercices****3-1/ Exercice 1****3-2/ Exercice 2****3-3/ Exercice 3****3-4/ Exercice 4**

I- Primitive d'une fonction numérique sur un intervalle**1-1 Définition**Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} .On dit que F est une primitive de la fonction f sur I si F est dérivable sur I et $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$ **Exemple****1-2/ Proposition 1**Si f est une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} , alors f admet des primitives sur I .**1-3/ Proposition 2**Soit f une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} .- Si F est une primitive de la fonction f sur I alors les primitives de f sur I sont les fonctions $x \rightarrow F(x) + c$; ($c \in \mathbb{R}$)

- soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$; il existe une seule fonction primitive G de f qui vérifie la condition $G(x_0) = y_0$.

1-4/ Proposition 3

F et G sont les primitives respectivement de f et g sur I .

On a $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$.

II- primitives usuelles et opérations

2-1/ Tableau des primitives usuelles

Les primitives F	Fonction f
$x \mapsto c$	$x \mapsto 0$
$x \mapsto ax + c$	$x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$
$x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$	$x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$
$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$
$x \mapsto -\frac{1}{x} + c$	$x \mapsto \frac{1}{x^2}$
$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^* \setminus \{-1\})$

2-2/ Fonctions primitives et opérations

Les primitives F	Fonction f
$\frac{1}{r+1} U^{r+1} + c$	$U' \times U^r \quad (r \in \mathbb{N})$
$-\frac{1}{U}$	$\frac{U'}{U^2} \quad (U \neq 0)$
$2\sqrt{U}$	$\frac{U'}{\sqrt{U}} \quad (U > 0)$
$\frac{-1}{(n-1)U^{n-1}}$	$\frac{U'}{U^n} \quad (n \in \mathbb{N}^* \setminus \{-1\})$

III- Exercices

3-1/ Exercice 1

Soit f et F deux fonctions numériques.

Montrer que F est une primitive de f sur I dans les cas suivants :

$$\begin{array}{l}
 \textcircled{1} \quad \left(\begin{array}{l} F(x) = x^3 + \frac{1}{x} + 4 \\ f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2} \\ I = \mathbb{R}^* \end{array} \right) \\
 \textcircled{2} \quad \left(\begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \sqrt{x} + 4 \\ f(x) = x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ I =]0, +\infty[\end{array} \right) \\
 \textcircled{3} \quad \left(\begin{array}{l} F(x) = \frac{(x^2+1)^3}{3} \\ f(x) = 2x(x^2+1)^2 \\ I =]0, +\infty[\end{array} \right)
 \end{array}$$

3-2/ Exercice 2

Soient f et F deux fonctions numériques définies sur \mathbb{R} par :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= x^4 + x^3 + x^2 + 1 \\
 f(x) &= 4x^3 + 3x^2 + 2x \\
 I &= \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

- Montrer que F est une primitive de f sur \mathbb{R} .
- Déterminer G l'ensemble des primitives de f sur \mathbb{R} .
- Déterminer la primitive de f qui vérifie $G(0) = 1$.

3-3/ Exercice 3

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= 4x^4 + 3x^3 + x ; \quad I = \mathbb{R} \\
 f_2(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 ; \quad I =]0, +\infty[\\
 f_3(x) &= 2x^5 - 3x^2 - 1 ; \quad I = \mathbb{R} \\
 f_4(x) &= \frac{1}{x^3} + \frac{2}{3x^5} ; \quad I = \mathbb{R}^* \\
 f_5(x) &= 2x(x^2+1)^3 ; \quad I = \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_6(x) &= \frac{2x}{(x^2+1)^2} ; \quad I = \mathbb{R} \\
 f_7(x) &= \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} ; \quad I = \mathbb{R} \\
 f_8(x) &= x(x^2+1) ; \quad I = \mathbb{R} \\
 f_9(x) &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^3 ; \quad I = \mathbb{R}^*
 \end{aligned}$$

3-4/ Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]-1; 1[$ par : $f(x) = \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

- Déterminer deux réels a et b tels que $f(x) = \frac{ax}{(x^2-1)^2} - \frac{b}{(x-1)^2}$.
- En déduire toutes les primitives de f sur $]-1; 1[$.
- Déterminer la primitive F de la fonction f qui vérifie $F(0) = 1$.