Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

Séance 7 (Suites numériques – Partie 2)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Critères de convergence

1-1/ Critère 1 (Théorème des gendarmes)

1-2/ Critère 2 (Théorème des gendarmes)

1-3/ Théorème

1-4/ Critère 3

II- Limite d'une suite de type $U_{n+1} = f(U_n)$

III- Limite d'une suite de type $V_n = f(U_n)$

IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

4-2/ Exercice 2

4-3/ Exercice 3

4-4/ Exercice 4

I- Critères de convergence

1-1/ Critère 1 (Théorème des gendarmes)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites numériques.

Si, on a $v_n \leq u_n \leq w_n$ pour tout n de I et $\lim v_n = \lim w_n = l$, alors (u_n) est convergente et $\lim u_n = l$.

Exemple

1-2/ Critère 2 (Théorème des gendarmes)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques et l un réel.

Si, on a $|u_n - l| \leq v_n$ pour tout n de I et $\lim v_n = 0$, alors (u_n) est convergente et $\lim u_n = l$.

1-3/ Théorème

Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.

Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

1-4/ Critère 3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.

Si on a $u_n \geq v_n$ pour tout n de I ,et $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim u_n = +\infty$.

Si on a $u_n \leq v_n$ pour tout n de I et $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.

Exemple

II- Limite d'une suite de type $U_{n+1} = f(U_n)$

Propriété

$(U_n)_{n\in I}$ est la suite numérique définie par la relation récurrente du type $U_{n+1} = f(U_n)$, et de premier terme U_0, avec f est une fonction continue sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$.

Si $U_0 \in I$ et $(U_n)_{n\in I}$ est une suite convergente alors sa limite l est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple

III- Limite d'une suite de type $V_n = f(U_n)$

Propriété

si $(U_n)_{n\in I}$ est la suite numérique convergente , et sa limite vaut L , et f est une fonction continue en L,

Alors la suite $(V_n)_{n\in I}$ définie par $V_n = f(U_n)$ une suite convergente et sa limite est f(L).

Exemple

IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

On considère la fonction h définie sur $[1, +\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x}$

1. Étudier la monotonie de h sur $[1, +\infty[$.
2. Montrer que $h([1, +\infty[) \subset [1, +\infty[$.
3. Étudier le signe de $h(x) - x$ sur $[1, +\infty[$.
4. Résoudre dans $[1, +\infty[$ l'équation $h(x) = x$.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$: $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

5. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})\ :\ u_n \geq 1$.
6. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
7. En déduire qu'elle est convergente.
8. Calculer la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$.

4-2/ Exercice 2

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n} \end{cases}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ :\ 2 \leq u_n \leq 4$.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ : 0 \leq\ 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\,(4 - u_n)$.
4. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ :\ 0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
5. Calculer la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$.

4-3/ Exercice 3

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{{u_n}^3}{3{u_n}^2+1} \end{cases}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ :\ u_n > 0$.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n). et en déduire qu'elle est convergente
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ :\ u_{n+1} \leq \frac{1}{3} u_n$.
4. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ :\ 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
5. Calculer limite de (u_n).

4-4/ Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f\left(x\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

1. Dresser le tableau de variation de f.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Calculer u_1 et u_2 (donner les résultats sous forme de fractions irréductibles, puis sous forme décimales arrondies à 10^{-2} près).
3. Démontrer, par récurrence, que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{3}{2}$
4. Démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$.
5. En déduire, par récurrence, que pour tout entier n, on a :
   $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{2}\right)$
6. En déduire la limite de la suite (u_n).