

I- Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

- 1) Calculer u_1 et u_2
- 2) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}; 0 < u_n < 1$

3) Démontrer que la suite (u_n) est croissante

4) Déduire que la suite (u_n) est convergente

Soit (v_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$

- 5)
 - a- Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 3$
 - b- Exprimer v_n en fonction de n
 - c- Exprimer u_n en fonction de v_n
 - d- Déduire v_n en fonction de n
- 6) Déterminer la limite de u_n

II- Exercice 2

Soit f définie par $f(x) = 3x - 1 + \frac{1}{x-2}$

Soit (\mathcal{C}_f) la courbe de la fonction dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

- 1) Déterminer le domaine de définition de f
- 2)
 - a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 - b- Montrer que (\mathcal{C}_f) admet une asymptote inclinée d'équation $y = 3x - 1$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ puis donner l'interprétation géométrique
- 4)
 - a- Déterminer l'intersection de (\mathcal{C}_f) et l'axe des abscisses
 - b- Déterminer l'intersection de (\mathcal{C}_f) et l'axe des ordonnées

5)

a- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$

b- Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f

6) Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in D_f$

7) Étudier la convexité de (\mathcal{C}_f)

8) Tracer (\mathcal{C}_f)