Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

Séance 5 (Étude d'une fonction numérique)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

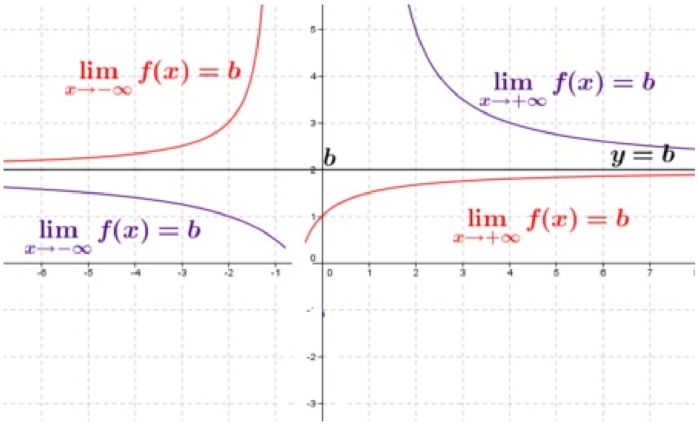
I- Étude des branches infinies (Rappel)

1-1/ Les asymptotes

Dans tout ce qui suit, f est une fonction numérique de la variable réelle x et $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

L'asymptote horizontale

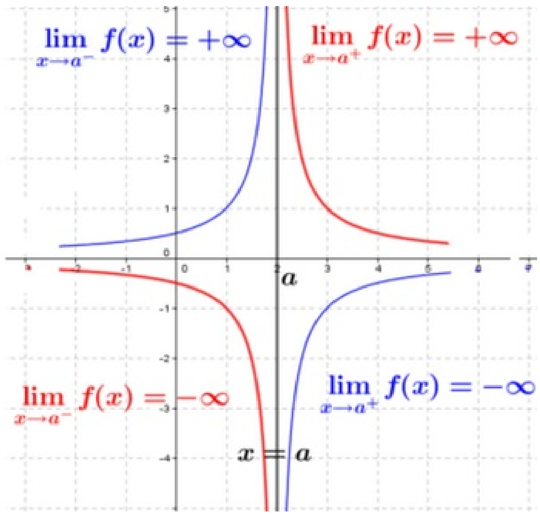
La droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$



Exemple

L’asymptote verticale

La droite d’équation $x = a$ est une asymptote verticale de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ si et seulement si $\lim_{x\to a} f\left(x\right) = \pm\infty$

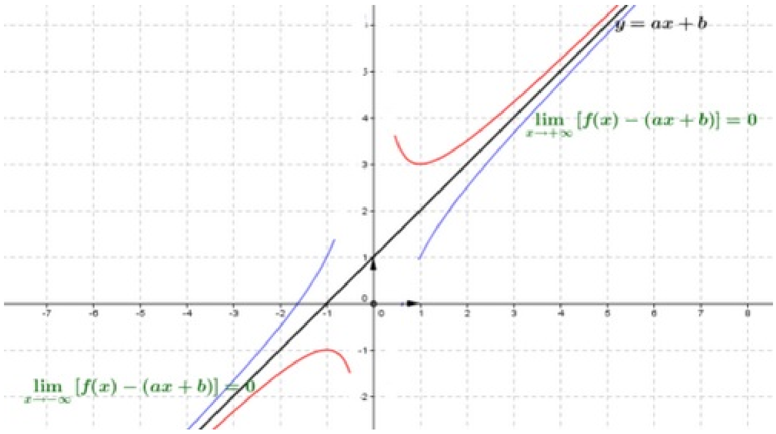


Exemple

L’asymptote oblique

La droite d’équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ si et seulement si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \ \left(a \neq 0\right)$ et $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right) - ax = b$

La droite d’équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ si et seulement si $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right) - \left(ax + b\right) = 0$

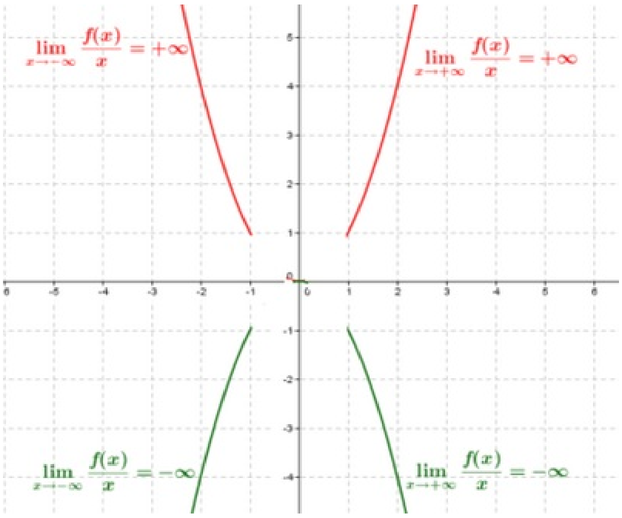


Exemple

1-2/ Les branches paraboliques

Branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées

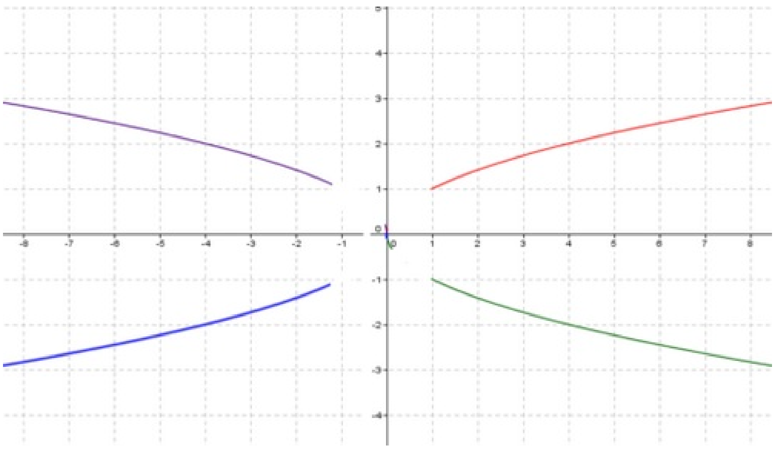
Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ on dit que la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées.



Exemple

Branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses

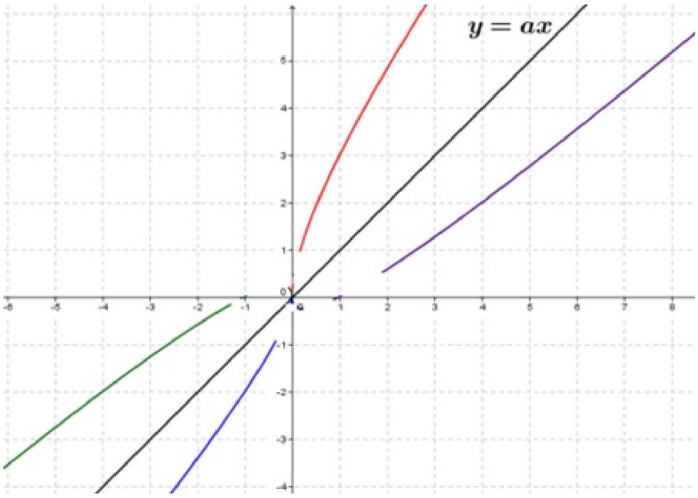
Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ on dit que la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses.



Exemple

Branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \ \ (a \neq 0)$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ on dit que la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$



Exemple

II- Axe de symétrie – Centre de symétrie

2-1/ Proposition 1

Soit f une fonction numérique et $\left(\mathscr{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Pour que la droite (D) d'équation $x = a$ soit un axe de symétrie de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$, il suffit de montrer que pour tout
$x \in D_f \ : \ (2a - x) \in D_f \ et \ f(2a - x) = f(x)$

2-2/ Proposition 2

Soit f une fonction numérique et $\left(\mathscr{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Pour que le point $\Omega(a, b)$ soit un centre de symétrie de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$, il suffit de montrer que pour tout $x \in D_f \ : \ (2a - x) \in D_f \ et \ f(2a - x) = 2b - f(x)$

III- Exercices

3-1/ Exercice 1 (Étude d'une fonction polynôme)

f est la fonction définie par $f(x) = x^4 - 2x^2$

1. Donner le domaine de définition de la fonction f
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
3. Étudier le comportement de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$
4. Donner le tableau de variation de la fonction f
5. Déterminer les extremums de f
6. Déterminer les points d'inflexions de la courbe représentant la fonction f
7. Déterminer les points d'intersection de la courbe représentant la fonction f et (ox)
8. Tracer la courbe représentant la fonction f dans un repère orthonormé

3-2/ Exercice 2 (Étude d'une fonction rationnelle)

f est la fonction définie par $f\left(x\right)=\frac{x^2+x+3}{2x^2+2x-4}$

1. Donner le domaine de définition de la fonction f
2. Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition et donner l'interprétation graphique des résultats obtenus
3. Donner le tableau de variation de la fonction f
4. Tracer la courbe représentant la fonction f dans un repère orthonormé
5. Montrer que la droite d'équation $x=-\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentant la fonction f

3-3/ Exercice 3 (Étude d'une fonction irrationnelle)

f est la fonction définie par $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-4}$

1. Donner le domaine de définition de la fonction f
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)$
3. Étudier la dérivabilité de f à droite de 2 et à gauche de -2
4. Donner une interprétation géométrique des résultats de la question 3
5. Calculer la dérivée de la fonction f et étudier son signe
6. Donner le tableau de variation de la fonction f
7. Étudier les branches infinies de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ représentant la fonction f.
8. Tracer la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ représentant la fonction f

3-4/ Exercice 4

1. Étudier la convexité de la courbe représentative de la fonction f et déterminer les points d'inflexion (s'ils existent) dans les cas suivants :

$$1 \;\; f\left(x\right)=\sqrt{2x-2}+x$$
$$2 \;\; f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x+1$$
$$3 \;\; f\left(x\right)=\left(x-1\right)\sqrt{x-1}$$