Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

Séance 3 (Continuité – Partie 2)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

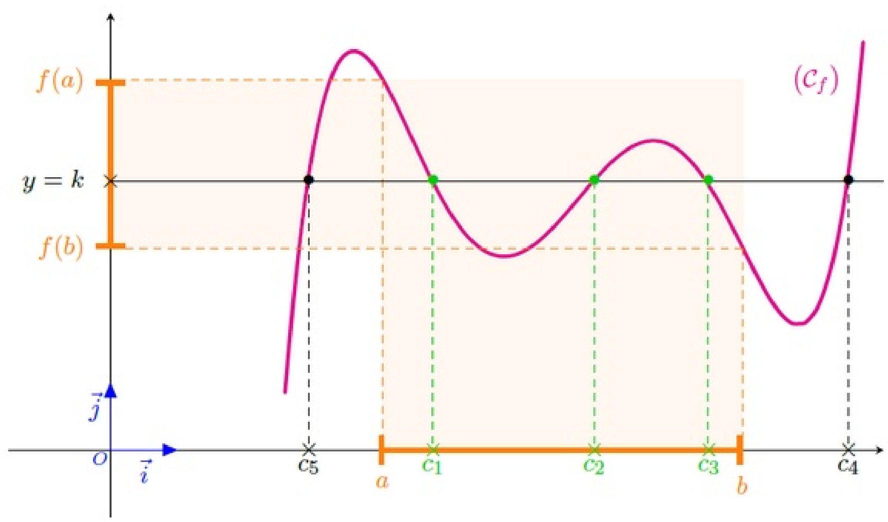
Sommaire

I- Théorème des valeurs intermédiaires

1-1/ Théorème

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et k un réel quelconque compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe au moins un réel c dans $[a;b]$ tel que $f(c) = k$

Géométriquement



Exemple

I- Théorème des valeurs intermédiaires

Conséquence 1

f est continue sur l'intervalle $[a;b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$.

Exemple

I- Théorème des valeurs intermédiaires

Conséquence 2

Si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a;b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[a;b]$.

Exemple

I- Théorème des valeurs intermédiaires

1-2/ Méthode dichotomie

Si f une fonction numérique continue et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[a;b]$

L'algorithme de la méthode dichotomie

On détermine $f(c)$ l'image de centre du $[a;b]$ tel que $c = \frac{a+b}{2}$

- Si $f(a) \times f(c) \leq 0$ alors $\alpha \in [a;c]$
- Si $f(c) \times f(b) \leq 0$ alors $\alpha \in [c;b]$

On reprend les mêmes étapes sur l'intervalle qui contient α jusqu'à avoir un encadrement d'amplitude convenable

.Exemple :

II- La fonction réciproque

2-1/ Propriété 1

Si f est continue et strictement monotone sur intervalle I, alors f admet une fonction réciproque notée f^{-1} et définie de $J = f(I)$ vers I telle que :

$$\forall x \in f(I) \; ; \; \forall y \in I \; ; \; f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

Exemple

II- La fonction réciproque

2-2/ Propriété 2

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f admet f^{-1} définie sur $J = f(I)$ et on a :

- f^{-1} est continue sur $J = f(I)$

- f^{-1} est strictement monotone sur $J = f(I)$ et elle a le même sens de variation que $f$sur I.

- Les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ (la première bissectrice du repère).

III- Exercices

3-1/ Exercice 1

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 4x - 1$$

1. Étudier les variations de f
2. Déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution a dans $[2;3]$
3. Déterminer un encadrement de a d'amplitude $0,5$

III- Exercices

3-2/ Exercice 2

A- Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 + 1$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque
2. Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$

B- Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{1}{x}$

1. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
2. Calculer $g^{-1}(-1)$ sans déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$.

III- Exercices

3-3/ Exercice 3

C- Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
2. Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pout tout $x \in J$

III- Exercices

3-4/ Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{x} + x^2 - 4$

1. Montrer que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
2. En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur lui-même.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$, et que $1,6 < \alpha < 1,7$.