Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

Séance 4 (Dérivabilité d'une fonction numérique)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Dérivabilité d'une fonction en un point

1-1/ Nombre dérivé en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , et soit $a \in I$

On dit que f est dérivable en a, s'il existe un réel l tel que : $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$

Le nombre l est appelé le nombre dérivé de la fonction f en a, noté $f'(a)$, et on écrit :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

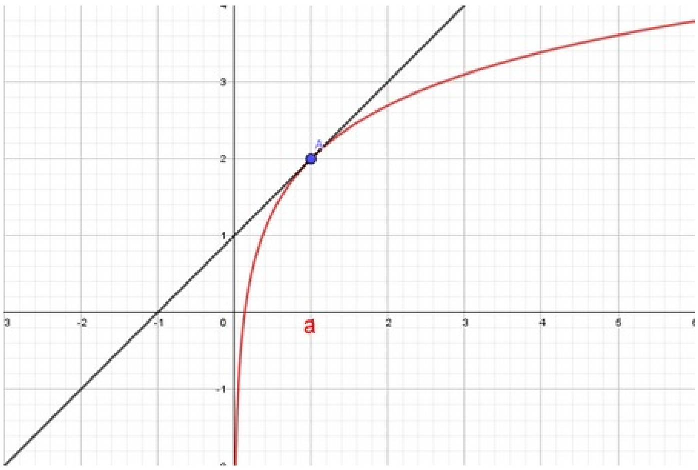
Exemple

1-2/ Interprétation géométrique du nombre dérivé

Propriété

Si f est une fonction dérivable en a, alors l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est donnée par :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$



Exemple

II- Dérivabilité à droite – dérivabilité à gauche

2-1/ Définition et propriété

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a, a+r[$ où $r > 0$

On dit que f est dérivable à droite de a, s'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$

Le nombre l est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en a,noté $f'_d(a)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]a-r, a]$ où $r > 0$

On dit que f est dérivable à gauche de a, s'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$

Le nombre l est appelé le nombre dérivé de la fonction f à gauche en a, noté $f'_g(a)$

Exemple

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , et soit $a \in I$

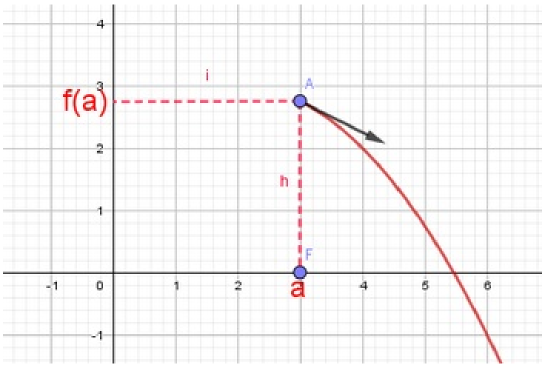
f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

Exemple

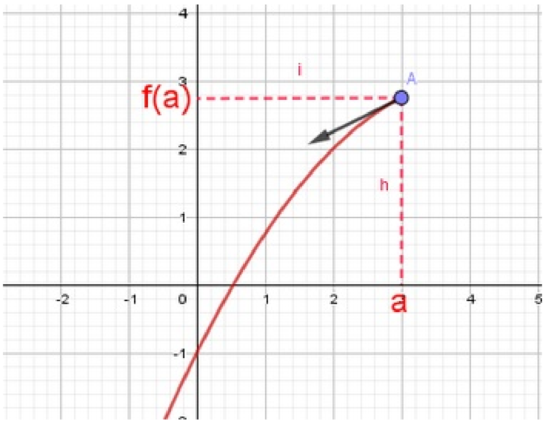
2-2/ Interprétation géométrique

Propriété

Si f est dérivable à droite en a, alors la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une demi-tangente à droite du point d'abscisse a, d'équation : $\begin{cases} y = f'_d(a)(x-a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$



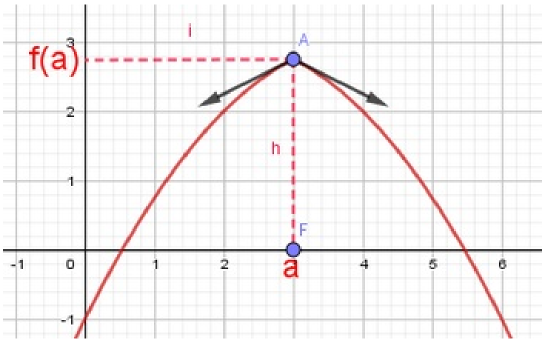
Si f est dérivable à gauche en a, alors la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une demi-tangente à gauche du point d'abscisse a, d'équation : $\begin{cases} y = f'_g(a)(x-a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$



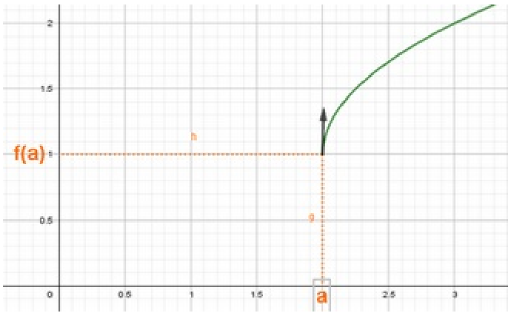
Exemple

Remarques

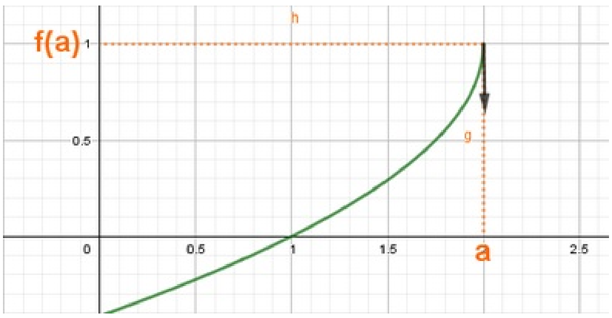
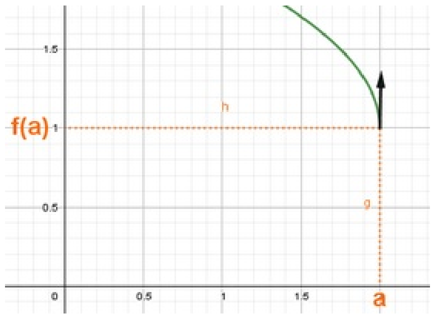
A- Si f dérivable à droite et à gauche en a, et $f'_d(a) \neq f'_g(a)$



B- Si $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \infty$, alors $(\mathscr{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale à droite du point d'abscisse a.

	
$\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$

C- Si $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \infty$, alors $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une demi-tangente verticale à gauche du point d'abscisse a.

	
$\lim\limits_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$

III- Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

3-1/ Définition

On dit que f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ si f est dérivable en tout point de l'intervalle $]a, b[$.

On dit que f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a, b]$ si f est dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, et dérivable à droite en a et à gauche en b.

3-2/ Propriété

Toute fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition.

La fonction $x \to \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exemple

3-3/ Tableau des dérivées usuelles

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f(x)=k, k\in\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}^*$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$	$f'(x)=\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$

3-4/ Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété 1

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Les fonctions $f+g$ et $f\times g$ sont dérivables sur I, et on a :

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(\alpha . f)' = \alpha . f'$$
$$(f\times g)' = f'.g + f.g'$$

Si g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I, et on a :

$$\left(\frac{\alpha}{g}\right)' = \frac{-\alpha . g'}{g^2}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$$

Exemple

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

La fonction f^n est dérivable sur I, et on a : $(f^n)' = n.f'.f^{n-1}$

Si f est strictement positive sur I, alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I, et on a : $\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

Exemple

Propriété 3 (Dérivée de la fonction Réciproque)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit $a\in I$

Si f est dérivable en a et $f'(a)\neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$

Corollaire

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

Si f est dérivable sur I telle que la fonction f' ne s'annule pas sur I, alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $J=f(I)$.

De plus pour tout $x\in J$ on a: $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Exemple

IV- Applications de la dérivation

4-1/ Variations d'une fonction

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors:

f est croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) :\ f'(x) \geq 0$

f est strictement croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) :\ f'(x) > 0$

f est décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) :\ f'(x) \leq 0$

f est strictement décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) :\ f'(x) < 0$

f est constante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) :\ f'(x) = 0$

Exemple

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors :

Si f' est positive sur I, et ne s'annule qu'en un nombre fini des points, alors f est strictement croissante sur I.

Si f' est négative sur I, et ne s'annule qu'en un nombre fini des points, alors f est strictement décroissante sur I.

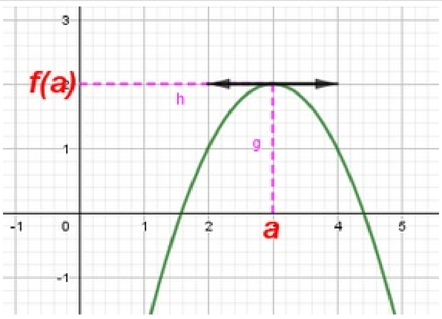
Exemple

4-2/ Valeur minimale et maximale

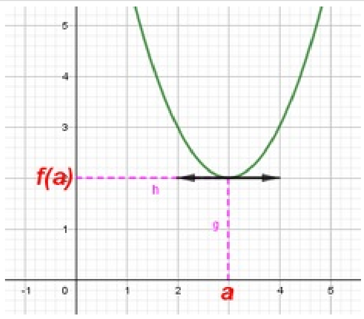
Propriété 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et soit $a \in I$

Si f admet un extremum en un point a, alors $f'(a) = 0$



f admet un maximum en a



f admet un minimum en a

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et soit $a \in I$

Si f s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum en a.

Exemple

4-3/ Étude de la concavité d'une courbe

Définition

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, alors:

Pour que la courbe de f soit convexe sur I,il faut et il suffit que $(\forall x \in I): \; f''(x) \geq 0$

Pour que la courbe de f soit concave sur I,il faut et il suffit que $(\forall x \in I): \; f''(x) \leq 0$

Pour que le point $m(a, f(a))$ soit un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$, il faut et il suffit que la dérivée seconde f'' s'annule en a, et change de signe de part et d'autre de a.

Exemple

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

Étudier la dérivabilité de la fonction f en a dans chacun des cas suivants :

$$1- \; f(x) = x^2 + x \; et \; a = 3$$
$$2- \; f(x) = \sqrt{3+x} \; et \; a = 1$$
$$3- \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x+1} \; (x \neq -1) \\ f(-1) = 2 \end{cases} \; et \; a = -1$$

5-2/ Exercice 2

Pour chacun des cas suivants indiquer l'ensemble de dérivabilité de la fonction f puis déterminer f' :

$$1- \; f(x) = 3x^7 - 4x^3 - 6x - 1$$
$$2- \; f(x) = \sqrt{x} - \frac{5}{x}$$
$$3- \; f(x) = (2x-3)\left(x^2+5\right)$$
$$4- \; f(x) = \frac{1}{x^4} + 3x + 1$$
$$5- \; f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}+1}$$
$$6- \; f(x) = \left(\frac{1}{x} + x^2\right)^4$$
$$7- \; f(x) = \sqrt{2x^2+3}$$

5-3/ Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$

1. Étudier les variations de la fonction f

Soit g la restriction de f sur $[1, +\infty[$

2. Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $2 < \alpha < 3$
4. Montrer que : $\left(g^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{3(a^2-1)}$

5-4/ Exercice 4

En utilisant la fonction dérivée, étudier les variations de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$1- \ f(x) = x^2 + 4x - 1$$
$$2- \ f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$
$$3- \ f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$$

5-5/ Exercice 5

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 4x^3 - x^2 - 1$

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$
2. Déterminer f' la fonction dérivée de la fonction f.
3. Donner le tableau de variations de la fonction f.
4. Déterminer les extremums de la fonction f.
5. Etudier la concavité de $\mathscr{C}_f$.

5-6/ Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x + \sqrt{x-1}$

1. Montrer que f est dérivable sur $]1;+\infty[$ puis calculer f' (x).
2. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
3. Calculer $f(2)$, montrer que f^{-1} est dérivable en 3, puis calculer $\left(f^{-1}\right)$' (3).
4. Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x.