

Sommaire

## I- Introduction aux nombres complexes

1-1/ Définitions

1-2/ Vocabulaire

## II- Présentation géométrique d'un nombre complexe

2-1/ Introduction

2-2/ Propriétés des affixes

## III- Conjugué d'un nombre complexe

3-1/ Définition

3-2/ Propriétés

## IV- Module d'un nombre complexe

4-1/ Définition

4-2/ Propriétés 1

4-3/ Propriétés 2

## V- Argument d'un nombre complexe non nul

5-1/ Définition

5-2/ Propriétés

## VI- Écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul

6-1/ Définition

6-2/ Propriétés

## VII- Opérations sur les formes trigonométriques

## VIII- Exercices

8-1/ Exercice 1

8-2/ Exercice 2

8-3/ Exercice 3

8-4/ Exercice 4

8-5/ Exercice 5

8-6/ Exercice 6

---

## I- Introduction aux nombres complexes

### 1-1/ Définitions

Un nombre complexe est un nombre tel que son écriture est de la forme  $z = a + ib$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $i$  est un nombre imaginaire avec  $i^2 = -1$ .

Les nombres complexes constituent un ensemble est appelé ensemble des nombres complexes, on le note  $\mathbb{C}$ .

L'ensemble  $\mathbb{C}$  est muni de deux opérations : l'addition notée  $+$  et la multiplication notée  $\times$ , qui ont les mêmes propriétés de l'addition et de la multiplication dans  $\mathbb{R}$  ( commutativité, associativité .... ).

$$a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b')$$

### Exemple

### 1-2/ Vocabulaire

Les nombres  $1 + i$  et  $1 - i$  sont appelés nombres complexes.

En général : un nombre complexe est écrit de la forme  $z = a + ib$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

Le nombre complexe  $z' = a - ib$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  est appelé le nombre complexe conjugué de  $z$  noté  $\bar{z}$ .

- Exemple :  $\{ z = 3 + 4i$   
 $z' = -5 - 2i$   
 $\Rightarrow \{ \bar{z} = 3 - 4i$   
 $\bar{z'} = -5 + 2i$

L'écriture  $z = a + ib$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  est appelée l'écriture (ou la forme ) algébrique de  $z$ .

Le réel  $a$  est appelé la partie réelle, et on note  $Re(z) = a$ .

Le réel  $b$  est appelé la partie imaginaire, et on note  $Im(z) = b$ .

### 1-3/ Opérations dans l'ensemble $\mathbb{C}$

$z = x + yi, z' = x' + y'i \in \mathbb{C}$  avec  $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$

#### Addition dans $\mathbb{C}$

$$z + z' = x + yi + x' + y'i = (x + x') + (y + y')i$$

#### Multiplication dans $\mathbb{C}$

$$z \times z' = (x + yi) \times (x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + yx')i$$

#### L'inverse de $z$

$$z = a + bi \neq 0 \ ((a, b) \neq (0, 0))$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

### Le quotient de z par z'

$$\frac{z}{z'} = \frac{x+yi}{x'+y'i} = \frac{z \times \bar{z}'}{z' \times \bar{z}'}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2} + \frac{yx'-xy'}{x'^2+y'^2}i$$

### Exemples

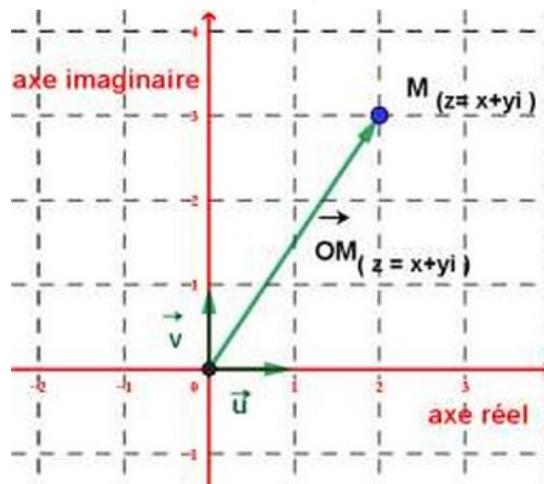
## II- Présentation géométrique d'un nombre complexe

### 2-1/ Introduction

Le plan ( $P$ ) est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

À tout nombre complexe  $z = x + yi$  de  $\mathbb{C}$  on lui associe le point  $M(x, y)$  de ( $P$ ) tel que :

$$f(z) = f(x + yi) = M(x, y)$$



Le plan ( $P$ ) est appelé le plan complexe.

Le point  $M(x, y)$  est l'image du complexe  $z = x + yi$ .

### 2-2/ Propriétés des affixes

$A(z_A)$ ,  $B(z_B)$ ,  $C(z_C)$  et  $I(z_I)$  sont 4 points du plan complexe ( $P$ ).

Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour affixe  $z_B - z_A$ .

Le vecteur  $k\overrightarrow{AB}$  a pour affixe  $k(z_B - z_A)$ .

Le point  $I$  milieu de  $[AB]$  a pour affixe  $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ .

$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) càd  $z_C - z_A = k(z_B - z_A)$ , d'où les points A et B et C sont alignés ( $z_B - z_A \neq 0$ ).

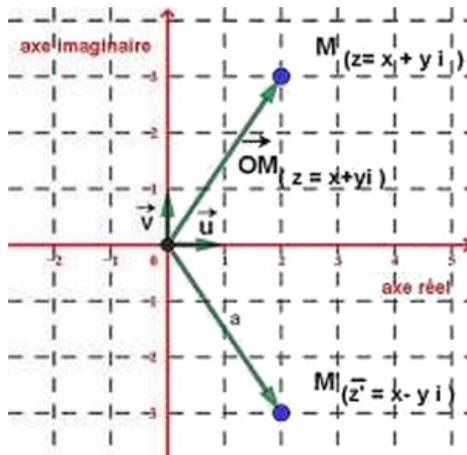
### Exemple

## III- Conjugué d'un nombre complexe

### 3-1/ Définition

Le nombre complexe  $z' = x - yi$  est appelé le conjugué du nombre complexe  $z = x + yi$

On note  $z' = \bar{z} = x - yi$ .



### 3-2/ Propriétés

Soient  $z = x + yi$  et  $z' = x' + y'i$  deux nombres complexes avec  $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$ . On a :

$$z + \bar{z} = 2x = 2\text{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2yi = 2\text{Im}(z)$$

$$z \times \bar{z} = x^2 + y^2$$

$$\overline{(\bar{z})} = z$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$z \in \mathbb{R} \leftrightarrow \bar{z} = z$$

$$z \in i\mathbb{R} \leftrightarrow \bar{z} = -z$$

### Exemple

## IV- Module d'un nombre complexe

### 4-1/ Définition

Soit  $z = x + yi \in \mathbb{C}$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Le nombre réel positif  $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$  s'appelle le module de  $z$ .

On le note  $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

### 4-2/ Propriétés 1

Soient  $z_A = x_A + y_A i$  et  $z_B = x_B + y_B i$  et  $z_C = x_C + y_C i$  les affixes des points  $A$  et  $B$  et  $C$  avec  $z_A \neq z_C$ .

$$\text{On a } AB = z_B - z_A = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

$$\left| \frac{z_B - z_A}{z_B - z_A} \right| = \frac{AB}{AC}$$

Si  $\left| \frac{z_B - z_A}{z_B - z_A} \right| = \frac{AB}{AC} = 1$  alors le triangle  $ABC$  est isocèle en  $A$ .

## 4-3/ Propriétés 2

$$|\bar{z}| = |-z| = |z| = |-\bar{z}|$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$\left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{1}{|z'|} \text{ et } \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$|z^p| = |z|^p ; p \in \mathbb{Z} \text{ et } z \neq 0$$

## V- Argument d'un nombre complexe non nul

### 5-1/ Définition

Soit  $M(z)$  ( $M(z) \neq O \Leftrightarrow z \neq 0$ ) est un point du plan complexe  $\mathbb{P}^{\square\square}$  muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

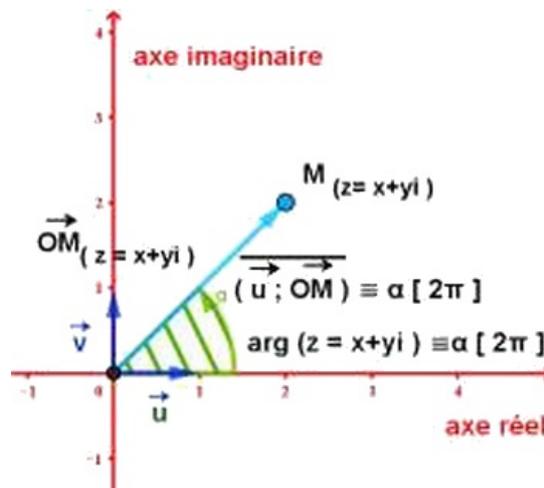
Toute mesure  $\alpha$  de l'angle orienté  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$  s'appelle argument du nombre complexe non nul  $z$ .

On note

$$\arg(z) = \alpha [2\pi]$$

$$\arg(z) = \overline{(\vec{u}, \overrightarrow{OM})} [2\pi]$$

$$\arg(z) = \alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}.$$



### 5-2/ Propriétés

$z$  et  $z'$  deux complexes non nuls :

$$\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{1}{z'}\right) \equiv -\arg(z') [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$$

$$p \in \mathbb{Z} ; \arg(z^p) \equiv p \times \arg(z) [2\pi]$$

$$k > 0 \Rightarrow \arg(kz) \equiv \arg(z) [2\pi]$$

$$k < 0 \Rightarrow \arg(kz) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi]$$

## VI- Écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul

### 6-1/ Définition

Soit  $z = x + yi$  un nombre complexe non nul tel que  $\arg(z) \equiv \alpha [2\pi]$  et  $r = |z|$ .

Le nombre complexe non nul  $z$  s'écrit de les formes suivantes :

$$z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$[|z|, \arg(z)] = [r, \alpha]$$

Chaque écriture précédente est appelé la forme (ou l'écriture) trigonométrique du nombre complexe non nul  $z = x + yi$ .

### 6-2/ Propriétés

$$\begin{aligned} z = a > 0 &\Rightarrow z = [a, 0] \\ z = a < 0 &\Rightarrow z = [-a, \pi] \\ z = bi ; b > 0 &\Rightarrow z = [b, \frac{\pi}{2}] \\ z = bi ; b < 0 &\Rightarrow z = [b, -\frac{\pi}{2}] \\ z = [r, \alpha] &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -z = [r, \pi + \alpha] \\ \bar{z} = [r, -\alpha] \\ -\bar{z} = [r, \pi - \alpha] \end{array} \right\} \end{aligned}$$

## VII- Opérations sur les formes trigonométriques

$z$  et  $z'$  deux complexes non nuls tel que :  $\begin{cases} z = [r, \alpha] = r (\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ z' = [r', \alpha'] = r' (\cos \alpha' + i \sin \alpha') \end{cases}$

On a :

$$z \times z' = [r, \alpha] \times [r', \alpha'] = [r \times r', \alpha + \alpha'] = rr' (\cos (\alpha + \alpha') + i \sin (\alpha + \alpha'))$$

$$z^n = [r, \alpha]^n = [r^n, n\alpha]$$

$$[1, \alpha]^n = [1^n, n\alpha] = [1, n\alpha] \Leftrightarrow [(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)]$$

$$\frac{1}{z'} = \frac{1}{[r', \alpha']} = \left[ \frac{1}{r'}, -\alpha' \right]$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{[r, \alpha]}{[r', \alpha']} = \left[ \frac{r}{r'}, \alpha - \alpha' \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{z'} = \frac{r(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')} = \frac{r}{r'} (\cos (\alpha - \alpha') + i \sin (\alpha - \alpha'))$$

## VIII- Exercices

### 8-1/ Exercice 1

1. Écrire les nombres complexes sous forme algébrique :

$$\begin{aligned}
1 \quad z_1 &= \frac{1}{2-3i} \\
2 \quad z_2 &= \frac{1-i}{3+i} \\
3 \quad z_3 &= \frac{2i}{1-2i} + \frac{(1+i)^2}{i} \\
4 \quad z_4 &= (3+i)(1-5i) \\
5 \quad z_5 &= \frac{3-6i}{3+i} + \frac{4}{3-i}
\end{aligned}$$

## 8-2/ Exercice 2

- Donner une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$\begin{aligned}
1 \quad z_1 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
2 \quad z_2 &= \sqrt{6} - \sqrt{2}i \\
3 \quad z_3 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}i \\
4 \quad z_4 &= (1-i)(-\sqrt{3}+i) \\
5 \quad z_5 &= \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} \\
6 \quad z_6 &= (1+i)^5
\end{aligned}$$

## 8-3/ Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives :  $z_A = 2 - 2i\sqrt{3}$  et  $z_B = 2 + 2i\sqrt{3}$  et  $z_C = 8$ .

- Donner une forme trigonométrique des nombres complexes  $z_A$ ,  $z_B$  et  $z_C$ .
- Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sur le repère.

On pose :  $Z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$

- Déterminer  $|Z|$  et  $\arg(Z)$ .
- En déduire la nature du triangle  $ABC$ .

## 8-4/ Exercice 4

On considère dans le plan complexe les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives :  $z_A = -\sqrt{2}$  et  $z_B = 1 + i$  et  $z_C = 1 - i$ .

- Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sur un repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .
- Déterminer le module et l'argument de  $Z = \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ .
- Déduire une mesure de l'angle orienté  $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$ .
- Déterminer la forme algébrique puis une forme trigonométrique du quotient  $\frac{z_A - z_B}{z_A}$ .
- Déduire  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ .

## 8-5/ Exercice 5

Dans le plan complexe, soit  $z = x + yi$  avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$ .

On considère le nombre complexe  $U = (z - 2i)(\bar{z} - 1)$ , et soit  $M$  l'image du nombre complexe  $z$ .

1. Écrire en fonction de  $x$  et  $y$  la partie réel et la partie imaginaire de  $U$ .
2. Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$  du plan tels que  $U$  est réel.
3. Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$  tels que  $U$  est imaginaire pur.

### 8-6/ Exercice 6

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

on considère les points  $A, B, C, D, E$  et  $F$  qui ont pour affixes  $z_A = 2, z_B = -2i, z_C = 2 + 2i, z_D = 3i, z_E = -3$  et  $z_F = -2 + 2i$

1. Représenter les points  $A, B, C, D, E$  et  $F$  dans le plan complexe.
2. En utilisant la représentation, déterminer l'argument des complexe  $z_A, z_B, z_C, z_D, z_E$  et  $z_F$ ,