

I- Exercice 1

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 + 2z + 2 = 0$$

On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct

$(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectivement $a = -1 + i$,

$b = 1 + i$, et $c = (1 + \sqrt{3})i$.

Soit $M(z)$ un point du plan complexe et $M'(z')$ son image par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

2. Montrer que $z' = -iz$
3. Dédurre que le point B est l'image du point A par la rotation R .
4. Montrer que $\frac{a-b}{c-b} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
5. Écrire le nombre complexe $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sous la forme trigonométrique.
6. Dédurre que le triangle ABC est équilatéral.

II- Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{7u_n+4}{2u_n+5} \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n > 2$.

On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}) v_n = \frac{u_n-2}{u_n+1}$

2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \frac{2+v_n}{1-v_n}$.
3. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et écrire v_n en fonction de n .
4. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$, puis déduire la limite de la suite (u_n) .

III- Exercice 3

Partie 1

Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + x + 3 - 3 \ln x$.

1. Montrer que $g'(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$

- Déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $]0, 1]$.
- Déduire que $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad g(x) > 0$

Partie 2

On considère f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \left(\frac{x+3}{x}\right) \ln x$.

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, puis interpréter géométriquement ce résultat.
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.
- Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.
- Montrer que $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
- Donner le tableau de variation de la fonction f .
- Étudier le signe de $f(x) - x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- Déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est au dessus de (Δ) sur l'intervalle $[1, +\infty[$, et au dessous de (Δ) sur l'intervalle $]0, 1]$.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0, +\infty[$ et que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.
- Tracer la droite (Δ) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.