AlloSchool

Mathématiques : 2 Bac SPC-SVT-STE-STM

Séance 5 (Dérivation et étude des fonctions – Partie 2)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Applications de la fonction dérivée première

1-1/ La monotonie d'une fonction et le signe de sa fonction dérivée

1-2/ Extremums d'une fonction dérivable

II- Applications de la fonction dérivée seconde

2-1/ Position relative de la tangente et la courbe – la concavité

2-2/ Points d'inflexions

III- Centre de symétrie – axe de symétrie de la courbe d'une fonction

3-1/ Centre de symétrie de la courbe d'une fonction

3-2/ Axe de symétrie de la courbe d'une fonction

IV- Branches infinies d'une fonction

4-1/ Branches infinies

4-2/ Asymptote verticale

4-3/ Asymptote horizontale

4-4/ Asymptote oblique

V- Bilan des branches infinies

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

6-5/ Exercice 5

6-6/ Exercice 6

I- Applications de la fonction dérivée première

1-1/ La monotonie d'une fonction et le signe de sa fonction dérivée

Propriété

f est une fonction dérivable sur un intervalle I

Si la fonction dérivée f' est strictement positive sur I, alors la fonction f est strictement croissante sur I.
(même si f' s'annule en un points fini de I, ça ne change pas la monotonie de f)

Si la fonction dérivée f' est strictement négative sur I, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
(même si f' s'annule en un points fini de I, ça ne change pas la monotonie de f)

Si la fonction f' est nulle sur I tout entier, alors f est constante.

Exemple

1-2/ Extremums d'une fonction dérivable

Propriété 1

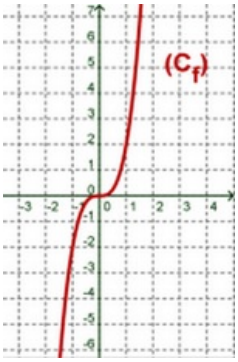
f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, a est un élément de I.

Si f est dérivable au point a et admet un extremum au point a alors $f'(a) = 0$.

Remarque

$f'(a) = 0$ ne signifie pas que $f(a)$ est un extremum de la fonction f.

Exemple



Propriété 2

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, a est un élément de I.

Si f' s'annule au point a et f' change de signe au voisinage de a alors $f(a)$ est un extremum de la fonction f.

Exemple

II- Applications de la fonction dérivée seconde

2-1/ Position relative de la tangente et la courbe – la concavité

Propriété et définition

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

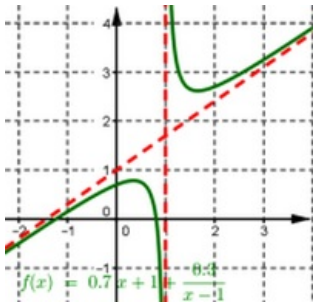
Si $\forall x \in I \ : \ f''(x) > 0$, alors la courbe $(\mathscr{C}_f)$ est située au dessus des tangentes des points x tel que $x \in I$.

Dans ce cas on dit que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f est convexe (ou sa concavité est dans le sens des ordonnés positives. On note $\vee$).

Si $\forall x \in I \ : \ f''(x) < 0$, alors la courbe $(\mathscr{C}_f)$ est située au dessous des tangentes des points x tel que $x \in I$.

Dans ce cas on dit que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f est concave (ou sa concavité est dans le sens des ordonnés négatives. On note $\wedge$).

Exemple



2-2/ Points d'inflexions

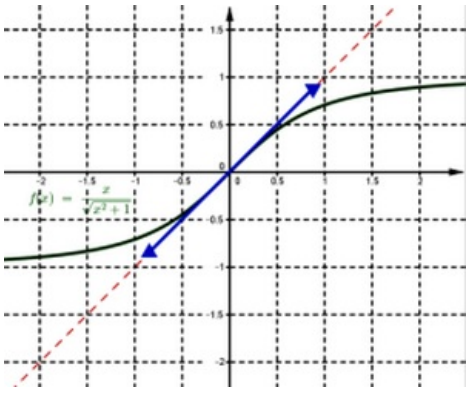
Propriété et définition

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, et $x_0 \in I$.

Si la fonction dérivée seconde f'' s'annule en x_0 et f'' change de signe au voisinage de x_0, alors le point $A(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion au courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Dans ce cas la tangente au point $A(x_0, f(x_0))$ coupe (ou traverse) la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Exemple



III- Centre de symétrie – axe de symétrie de la courbe d'une fonction

3-1/ Centre de symétrie de la courbe d'une fonction

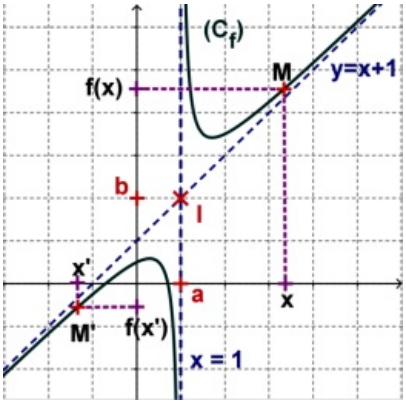
Propriété

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Le point $I(a, b)$ est centre de symétrie de la courbe

$$(\mathscr{C}_f) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f \ ; \ 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f \ ; \ f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$$

Exemple



3-2/ Axe de symétrie de la courbe d'une fonction

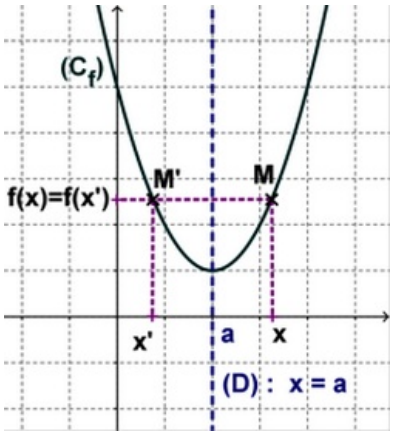
Propriété

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

La droite d'équation $D \ : \ x = a$ est axe de symétrie de la courbe

$$(\mathscr{C}_f) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f \ ; \ 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f \ ; \ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

Exemple



IV- Branches infinies d'une fonction

4-1/ Branches infinies

Définition

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Si au moins une des coordonnées d'un point M de la courbe de $(\mathscr{C}_f)$ tend vers l'infinie, on dit que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche infinie.

Exemple

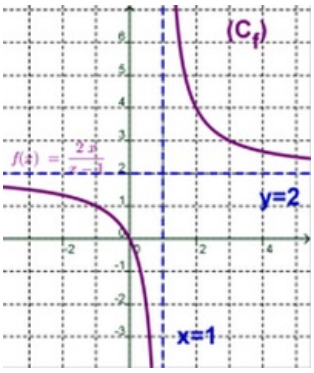
4-2/ Asymptote verticale

Définition

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à $(\mathscr{C}_f)$ (à droite de a ou à gauche de a).

Exemple



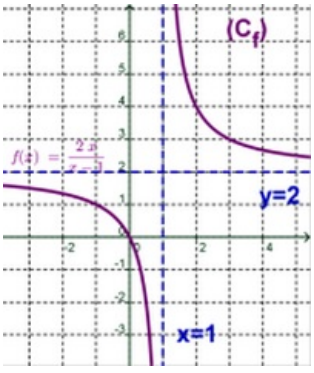
4-3/ Asymptote horizontale

Définition

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c$), alors la droite d'équation $y = b$ (ou $y = c$) est une asymptote horizontale à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$)

Exemple



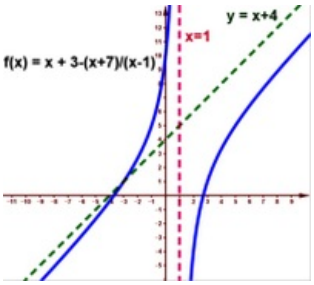
4-4/ Asymptote oblique

Définition

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f (tel que $]a,+\infty[\subset D_f$ ou $]-\infty,a[\subset D_f$)dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-(ax+b)=0$, alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $\pm\infty$.

Exemple



Propriétés

Si la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de$\pm\infty$, donc pour déterminer a et b on calcule les limites suivantes :

Pour déterminer a on calcule $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$

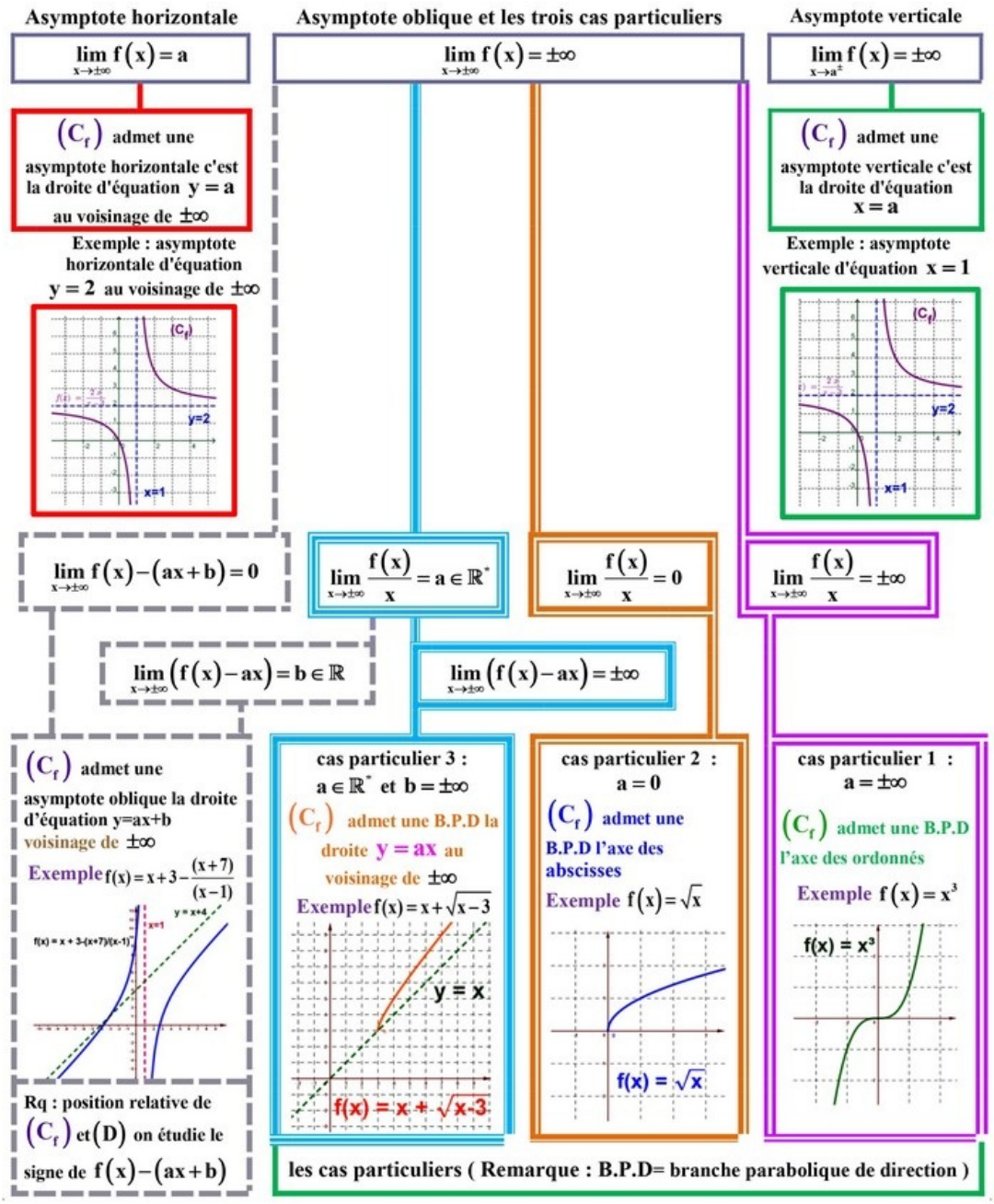
Pour déterminer b on calcule $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=b\in\mathbb{R}\ (b\neq\pm\infty)$

Les cas particuliers :

- 1er cas particulier : $a=\pm\infty$, on dit que $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnés.
- 2nd cas particulier : $a=0$, on dit que $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses .
- 3ème cas particulier : $b=\pm\infty$ avec $a\in\mathbb{R}^*$, on dit que $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$.

Exemples

V- Bilan des branches infinies



VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité de 1 cm).

1.

a- Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, puis interpréter géométriquement le deuxième résultat.

c- Montrer que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera son équation.

d- Étudier la position relative de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (Δ).

2.

a- Montrer que $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ pour tout x de D_f.

b- Montrer que pour tout x de $]-1,0]$ on a $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} \geq 1$, puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $]-1,0]$.

c- Montrer que pour tout x de $[0,+\infty[$ on a $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} \leq 1$, puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0,+\infty[$.

d- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f.

e- Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point $x_0 = 0$.

4. Construire la droite (Δ) et la tangente (T) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

5.

a- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J qu'on déterminera.

b- Montrer que la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur l'intervalle J.

c- Construire dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ la courbe représentative $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1}.

6-2/ Exercice 2

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité de 2 cm).

1.

a- Montrer que f est définie sur $D_f = \mathbb{R}$.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement les deux résultats.

2.

a- Montrer que $f'(x) = \frac{1}{(x^2-2x+2)\sqrt{x^2-2x+2}}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b- Montrer que la fonction f est croissante sur D_f.

c- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3.

a- Montrer que le point $I(1;0)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

b- Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point I.

4. Construire la tangente (T) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

5.

a- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J qu'on déterminera.

b- Construire dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ la courbe représentative $\left(\mathscr{C}_{f^{-1}}\right)$ de la fonction f^{-1}.

c- Calculer $f(1)$, puis montrer que la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en 0 puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

6-3/ Exercice 3

On considère la fonction numérique f définie sur $[0,+\infty[$ par
$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \ ; \ x \in \left[0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Soit $\left(\mathscr{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité de 2 cm).

1.

a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat.

b- Étudier la continuité de la fonction f au point $x_0 = 1$.

2.

a- Montrer que la fonction f est dérivable au point $x_0 = 1$ et le nombre dérivé est $f'(1) = -\frac{1}{8}$.

b- Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au point $x_0 = 1$.

c- Étudier la dérivabilité à droite de la fonction f au point $x_0 = 0$.

d- Vérifier la fonction dérivée de f sur $]0,+\infty[/\{1\}$ est $f'(x) = \frac{-\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$.

e- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0,+\infty[$.

3. Construire la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de f dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On considère g la restriction de la fonction f sur $I = [0,+\infty[$.

4) a- Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J qu'on déterminera.

4) b- Calculer $g(4)$ puis montrer que la fonction réciproque g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{3}$ puis calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{3}\right)$.

6-4/ Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie sur $D_f =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^4}{x^3+x^2} \ ; \ x \neq -1 \ et \ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative de la fonction dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité de 1 cm).

1.

a- Calculer $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)-(x-1)$ puis interpréter géométriquement les résultats.

c- Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

d- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ dont on déterminera l'équation.

e- Étudier la position relative de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (D) d'équation $y=x-1$ sur D_f.

2.

a- Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

b- Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,+\infty[$, puis vérifier que $f'(x)=\frac{x^5(x+2)}{(x^3+x^2)^2}$.

c- Étudier le signe de$f'(x)$ sur $]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,+\infty[$.

d- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f.

e- Écrire l'équation réduite de la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point $x_0=0$.

3. Construire dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ (unité de 1 cm).

On considère g la restriction de la fonction f sur $I=]-1,0]$.

4) a- Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J qu'on déterminera.

4) b- Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ puis montrer que la fonction réciproque g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{6}$.

4) c- Calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{6}\right)$.

6-5/ Exercice 5

Soit la fonction : $f(x)=\frac{x(x^2+1)}{x^2-1}$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Déterminer D_f, puis étudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f. Justifier les réponses.
2. Étudier la parité de f et en déduire un élément de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.
3. Étudier les limites de f aux bornes de D_f, et en déduire les asymptotes éventuelles à $(\mathscr{C}_f)$.
4. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
5. Étudier la concavité de $(\mathscr{C}_f)$ et résumer cette étude dans un tableau.
6. Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse 0.
7. Étudier la position de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à (T).
8. Tracer $(\mathscr{C}_f)$ et (T) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

6-5/ Exercice 6

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$. et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
2. Vérifier que : $g'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.
3. En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R});\ g(x) > 0$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+1}$.

1. Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = g(x)$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
4. Montrer que la droite (D) : $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
5. Tracer $(\mathscr{C}_f)$ et (D) dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.