AlloSchool

Mathématiques : 2 Bac SPC-SVT-STE-STM

Séance 5 (Dérivation et étude des fonctions – Partie 2)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Applications de la fonction dérivée première

1-1/ La monotonie d’une fonction et le signe de sa fonction dérivée

Propriété

f est une fonction dérivable sur un intervalle I

Si la fonction dérivée $f’$ est strictement positive sur I, alors la fonction f est strictement croissante sur I.
(même si $f’$ s’annule en un points fini de I, ça ne change pas la monotonie de f)

Si la fonction dérivée $f’$ est strictement négative sur I, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
(même si $f’$ s’annule en un points fini de I, ça ne change pas la monotonie de f)

Si la fonction $f’$ est nulle sur I tout entier, alors f est constante.

Exemple

1-2/ Extremums d’une fonction dérivable

Propriété 1

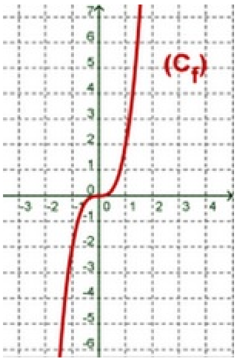
f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, a est un élément de I.

Si f est dérivable au point a et admet un extremum au point a alors $f’(a) = 0$.

Remarque

$f’(a) = 0$ ne signifie pas que $f(a)$ est un extremum de la fonction f.

Exemple



Propriété 2

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, a est un élément de I.

Si $f’$ s’annule au point a et $f’$ change de signe au voisinage de a alors $f(a)$ est un extremum de la fonction f.

Exemple

II- Applications de la fonction dérivée seconde

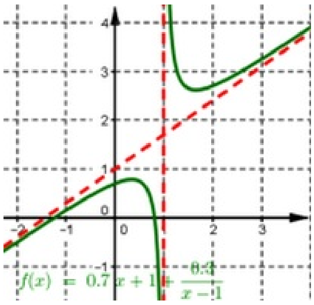
2-1/ Position relative de la tangente et la courbe – la concavité

Propriété et définition

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

Si $\forall x \in I \ : \ f\,"\,(x) > 0$, alors la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ est située au dessus des tangentes des points x tel que $x \in I$.
Dans ce cas on dit que la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de f est convexe (ou sa concavité est dans le sens des ordonnés positives. On note $\bigvee$).
Si $\forall x \in I \ : \ f\,"\,(x) < 0$, alors la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ est située au dessous des tangentes des points x tel que $x \in I$.
Dans ce cas on dit que la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de f est concave (ou sa concavité est dans le sens des ordonnés négatives. On note $\bigwedge$).

Exemple

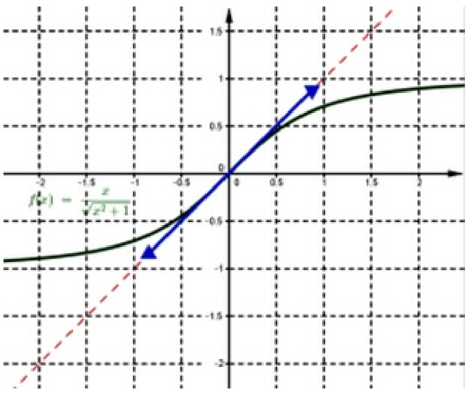


2-2/ Points d'inflexions

Propriété et définition

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, et $x_0 \in I$.
Si la fonction dérivée seconde $f\,"$ s'annule en x_0 et $f\,"$ change de signe au voisinage de x_0, alors le point $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ est un point d'inflexion au courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$.
Dans ce cas la tangente au point $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ coupe (ou traverse) la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$.

Exemple



III- Centre de symétrie – axe de symétrie de la courbe d'une fonction

3-1/ Centre de symétrie de la courbe d'une fonction

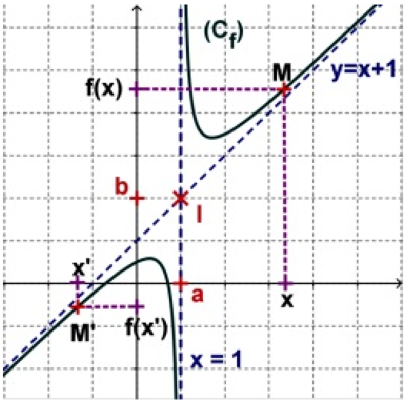
Propriété

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Le point $I\,(a,b)$ est centre de symétrie de la courbe

$$(\mathscr{C}_f) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f \;;\; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f \;;\; f\,(\,2a - x) + f\,(x) = 2b \end{cases}$$

Exemple



3-2/ Axe de symétrie de la courbe d'une fonction

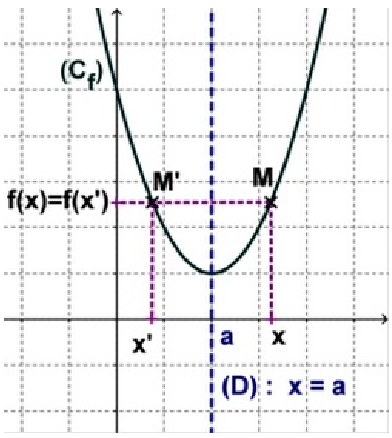
Propriété

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

La droite d'équation $D \;:\; x = a$ est axe de symétrie de la courbe

$$(\mathscr{C}_f) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f \;;\; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f \;;\; f\,(\,2a - x) = f\,(x) \end{cases}$$

Exemple



IV- Branches infinies d'une fonction

4-1/ Branches infinies

Définition

Soit $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Si au moins une des coordonnées d'un point M de la courbe de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ tend vers l'infinie, on dit que la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une branche infinie.

Exemple

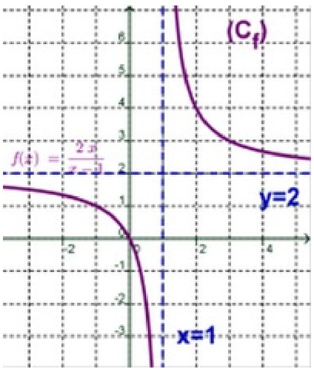
4-2/ Asymptote verticale

Définition

Soit $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à $\left(\mathscr{C}_f\right)$ (à droite de a ou à gauche de a).

Exemple



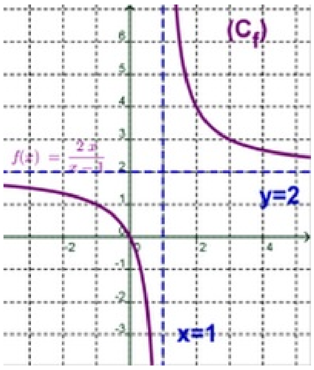
4-3/ Asymptote horizontale

Définition

Soit $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c$), alors la droite d'équation $y = b$ (ou $y = c$) est une asymptote horizontale à $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$)

Exemple



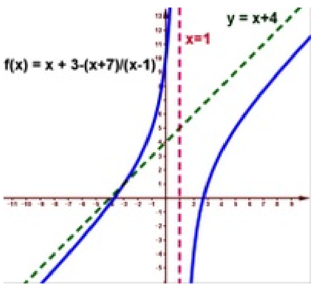
4-4/ Asymptote oblique

Définition

Soit $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f (tel que $\left]a,+\infty\right[\subset D_f$ ou $\left]-\infty,a\right[\subset D_f$)dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-(ax+b)=0$, alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au voisinage de $\pm\infty$.

Exemple



Propriétés

Si la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au voisinage de$\pm\infty$, donc pour déterminer a et b on calcule les limites suivantes :

Pour déterminer a on calcule $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$

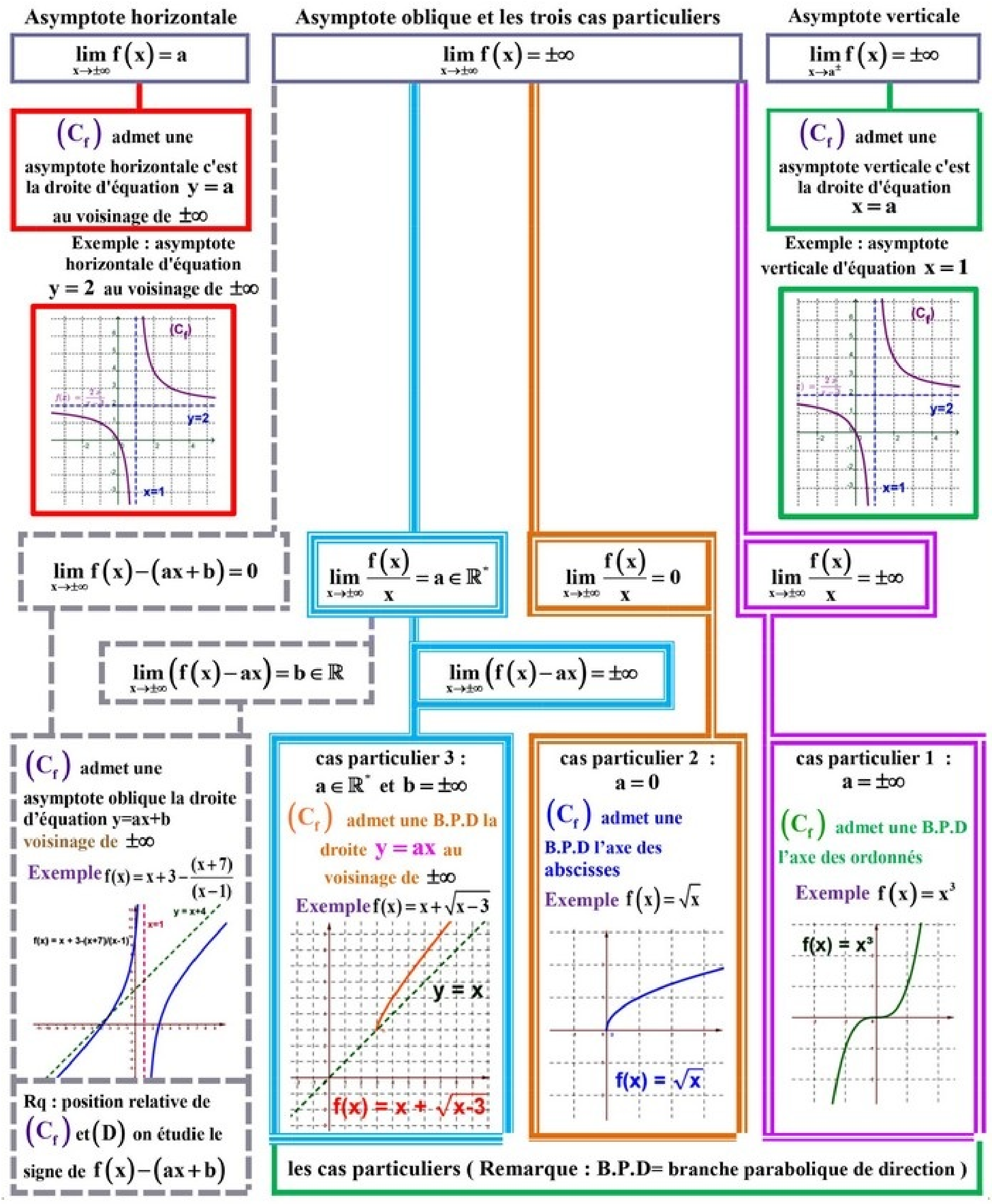
Pour déterminer b on calcule $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)=b\in\mathbb{R}\ \left(b\neq\pm\infty\right)$

Les cas particuliers :

- 1er cas particulier : $a=\pm\infty$, on dit que $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnés.
- 2nd cas particulier : $a=0$, on dit que $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses .
- 3ème cas particulier : $b=\pm\infty$ avec $a\in\mathbb{R}^*$, on dit que $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$.

Exemples

V- Bilan des branches infinies



VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=x+\frac{2}{\sqrt{x+1}}$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité de 1 cm).

1.

a- Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, puis interpréter géométriquement le deuxième résultat.

c- Montrer que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera son équation.

d- Étudier la position relative de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et la droite (Δ).

2.

a- Montrer que $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ pour tout x de D_f.

b- Montrer que pour tout x de $]-1,0]$ on a $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} \geq 1$, puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $]-1,0]$.

c- Montrer que pour tout x de $[0,+\infty[$ on a $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} \leq 1$, puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0,+\infty[$.

d- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f.

e- Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au point $x_0 = 0$.

4. Construire la droite (Δ) et la tangente (T) et la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de f dans le même repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

5.

a- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J qu'on déterminera.

b- Montrer que la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur l'intervalle J.

c- Construire dans le même repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ la courbe représentative $\left(\mathscr{C}_{f^{-1}}\right)$ de la fonction f^{-1}.

6-2/ Exercice 2

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$, et soit $\left(\mathscr{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ (unité de 2 cm).

1.

a- Montrer que f est définie sur $D_f = \mathbb{R}$.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement les deux résultats.

2.

a- Montrer que $f'(x) = \frac{1}{(x^2-2x+2)\sqrt{x^2-2x+2}}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b- Montrer que la fonction f est croissante sur D_f.

c- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3.

a- Montrer que le point $I(1;0)$ est un centre de symétrie de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$.

b- Donner l’équation de la tangente (T) à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au point I.

4. Construire la tangente (T) et la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de f dans le même repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

5.

a- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l’intervalle J qu'on déterminera.

b- Construire dans le même repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ la courbe représentative $\left(\mathscr{C}_{f^{-1}}\right)$ de la fonction f^{-1}.

c- Calculer $f(1)$, puis montrer que la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en 0 puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

6-3/ Exercice 3

On considère la fonction numérique f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \ ; \ x \in \left[0, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[\\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soit $\left(\mathscr{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ (unité de 2 cm).

1.

a- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat.

b- Étudier la continuité de la fonction f au point $x_0 = 1$.

2.

a- Montrer que la fonction f est dérivable au point $x_0 = 1$ et le nombre dérivé est $f’(1) = -\frac{1}{8}$.

b- Donner l’équation de la tangente (T) à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au point $x_0 = 1$.

c- Étudier la dérivabilité à droite de la fonction f au point $x_0 = 0$.

d- Vérifier la fonction dérivée de f sur $]0, +\infty[/\{1\}$ est $f’(x) = \frac{-\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$.

e- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

3. Construire la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de f dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

On considère g la restriction de la fonction f sur $I = [0, +\infty[$.

4) a- Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l’intervalle J qu'on déterminera.

4) b- Calculer $g\left(4\right)$ puis montrer que la fonction réciproque g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{3}$ puis calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{3}\right)$.

6-4/ Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie sur $D_f = \left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f\left(x\right) = \frac{x^4}{x^3+x^2} \ ; \ x \neq -1 \ et \ x \neq 0 \\ f\left(0\right) = 0 \end{cases}$$

Soit $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative de la fonction dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ (unité de 1 cm).

1.

a- Calculer $\lim\limits_{x\to-1^-} f\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f\left(x\right)$ puis interpréter géométriquement les résultats.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)-\left(x-1\right)$ puis interpréter géométriquement les résultats.

c- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)$.

d- Montrer que $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ dont on déterminera l'équation.

e- Étudier la position relative de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et la droite $\left(D\right)$ d'équation $y = x-1$ sur D_f.

2.

a- Calculer $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

b- Calculer $f'\left(x\right)$ pour tout x de $\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$, puis vérifier que $f'\left(x\right) = \frac{x^5(x+2)}{\left(x^3+x^2\right)^2}$.

c- Étudier le signe de $f'\left(x\right)$ sur $\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$.

d- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f.

e- Écrire l'équation réduite de la tangente à $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au point $x_0 = 0$.

3. Construire dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ la droite $\left(D\right)$ et la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ (unité de 1 cm).

On considère g la restriction de la fonction f sur $I = \left]-1,0\right]$.

4) a- Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J qu'on déterminera.

4) b- Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ puis montrer que la fonction réciproque g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{6}$.

4) c- Calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{6}\right)$.

6-5/ Exercice 5

Soit la fonction : $f(x) = \frac{x(x^2+1)}{x^2-1}$

Soit $\left(\mathscr{C}_f\right)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Déterminer D_f, puis étudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f. Justifier les réponses.
2. Étudier la parité de f et en déduire un élément de symétrie de $\left(\mathscr{C}_f\right)$.
3. Étudier les limites de f aux bornes de D_f, et en déduire les asymptotes éventuelles à $\left(\mathscr{C}_f\right)$.
4. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
5. Étudier la concavité de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et résumer cette étude dans un tableau.
6. Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au point d'abscisse 0.
7. Étudier la position de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ par rapport à (T).
8. Tracer $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et (T) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

6-5/ Exercice 6

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. Calculer $\lim_{x \to -\infty} g(x)$. et $\lim_{x \to +\infty} g(x)$
2. Vérifier que : $g'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.
3. En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R});\ g(x) > 0$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+1}$.

1. Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = g(x)$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
4. Montrer que la droite $(D)\ :\ y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à $\left(\mathscr{C}_f\right)$

au voisinage de $+\infty$.

5. Tracer $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et (D) dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.