

Sommaire

I- Dérivabilité d'une fonction en un point x_0 - Dérivabilité à droite et à gauche en un point x_0

1-1/ Dérivabilité

1-2/ Interprétation géométrique des nombres dérivées $f'(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$

II- Dérivabilité sur un intervalle

III- La fonction dérivée première d'une fonction - la fonction dérivée seconde - dérivée nième d' une fonction

IV- Les opérations sur les fonctions dérivables

V- Dérivabilité des fonctions polynomiales, rationnelles, trigonométriques et $f^n(x)$

VI- Dérivabilité de la composée de deux fonctions

VII- La fonction dérivée de la fonction réciproque

IX- Tableau des fonctions dérivées des fonctions usuelles

IX- Exercices

9-1/ Exercice 1

9-2/ Exercice 2

9-3/ Exercice 3

9-4/ Exercice 4

9-5/ Exercice 5

9-6/ Exercice 6

I- Dérivabilité d'une fonction en un point x_0 - Dérivabilité à droite et à gauche en un point x_0

1-1/ Dérivabilité

Définitions

Soit une fonction f tel que son domaine de définition contient un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$

f est dérivable au point

$$x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1 \in \mathbb{R} \quad \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 1 \in \mathbb{R} \right)$$

$l = f'(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé de f en x_0

f est dérivable à droite de

$$x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1 \in \mathbb{R} \quad \left(\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 1 \in \mathbb{R} \right)$$

$l = f'_d(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé à gauche de f en x_0

f est dérivable à gauche de

$$x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \lim \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1 \in \mathbb{R} \quad \left(\lim_{h \rightarrow 0^-} \lim \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 1 \in \mathbb{R} \right)$$

$l = f'_g(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé à gauche de f en x_0

Exemple

Propriété

Soit une fonction f

f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable à droite et à gauche et
 $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Exemple

1-2/ Interprétation géométrique des nombres dérivées $f'(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$

Interprétation géométrique des nombres dérivées $f'(x_0)$

f est une fonction dérivable au point x_0 .

(\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

Le nombre dérivé $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la droite tangente (T) à la courbe (\mathcal{C}_f) au point $A(x_0, f(x_0))$ (le point x_0).

L'équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (\mathcal{C}_f) au point x_0 est
 $(T) : y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$.

Si $f'(x_0) = 0$ alors la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

Exemple

Interprétation géométrique des nombres dérivées $f'_d(x_0)$ et

$f'_g(x_0)$

Si f est dérivable à droite de x_0 , alors on a une demi-tangente à droite de x_0 de coefficient directeur $f'_d(x_0)$.

L'équation de la demi tangente à droite de x_0 est

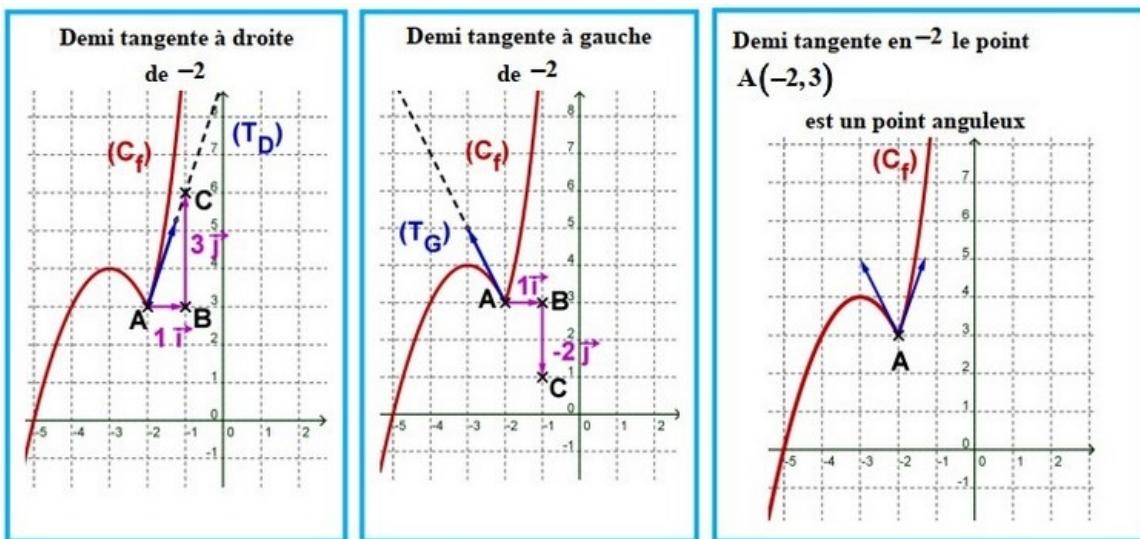
$$(T_d) : y = (x - x_0)f'_d(x_0) + f(x_0) \text{ avec } x \geq x_0.$$

Si f est dérivable à gauche de x_0 , alors on a une demi-tangente à gauche de x_0 de coefficient directeur $f'_g(x_0)$.

L'équation de la demi tangente à gauche de x_0 est

$$(T_g) : y = (x - x_0)f'_g(x_0) + f(x_0) \text{ avec } x \leq x_0.$$

Si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, alors f n'est pas dérivable en x_0 et le point $A(x_0, f(x_0))$ est appelé point anguleux.



Exemple

Remarque

Si f n'est pas dérivable à droite (c.à.d. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$), dans ce cas on a une demi tangente à droite de x_0 parallèle à l'axe des ordonnées.

Si f n'est pas dérivable à gauche (c.à.d. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$), dans ce cas on a une demi tangente à gauche de x_0 parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemple

II- Dérivabilité sur un intervalle

Définitions

f est une fonction dérivable sur $I =]a, b[\Leftrightarrow f$ est dérivable en tout point x_0 de I .

f est une fonction dérivable sur $I = [a, b[\Leftrightarrow f$ est dérivable sur $I =]a, b[$ et f est dérivable à droite du point a .

f est une fonction dérivable sur $I =]a, b] \Leftrightarrow f$ est dérivable sur $I =]a, b[$ et f est dérivable à gauche du point b .

f est une fonction dérivable sur $I = [a, b] \Leftrightarrow f$ est dérivable sur $I =]a, b[$ et f est dérivable à droite de a et à gauche de b .

Exemple

III- La fonction dérivée première d'une fonction – la fonction dérivée seconde – dérivée nième d' une fonction

Définitions

f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

La fonction g qui relie chaque élément x de I par le nombre $f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de f et on note $g = f'$.

g s'appelle la fonction dérivée de f .

La fonction dérivée de f' sur I s'appelle la fonction dérivée seconde (dérivée d'ordre 2), on la note f'' ou $f^{(2)}$.

En général : la dérivée d'ordre n de f est la fonction dérivée de $f^{(n-1)}$ (la dérivée de la fonction dérivée d'ordre $n - 1$), et on note $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$

Exemple

IV- Les opérations sur les fonctions dérivables

Propriété

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I .

On a :

La fonction $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

La fonction αf est dérivable sur I et $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$

La fonction $f \times g$ est dérivable sur I et $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

La fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur $I \forall x \in I, g(x) \neq 0$ et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$

La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $I \forall x \in I, g(x) \neq 0$ et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = -\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Exemple

V- Dérivabilité des fonctions polynomiales, rationnelles, trigonométriques et $f^n(x)$

Propriété

Toute fonction polynomiale est dérivable sur son ensemble de définition $D_f = \mathbb{R}$ et $(ax^n)' = nax^{n-1} (n \in \mathbb{N}^*)$.

Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition D_f .

f est une fonction dérivable sur un intervalle I :

La fonction f^n avec $n \in \mathbb{N}^*$ est dérivable sur I et on a

$$(f^n)'(x) = n f^{n-1}(x) f'(x).$$

Si pour tout $x \in I$, $f(x) \neq 0$, on a la fonction $f^p(x)$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ est dérivable sur I et $(f^p)'(x) = p f^{p-1}(x) f'(x)$.

La fonction $f(x) = \cos(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} avec $f'(x) = -\sin(x)$.

La fonction $f(x) = \sin(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} avec $f'(x) = \cos(x)$.

La fonction $f(x) = \tan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R} / \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ avec
 $f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Exemple

VI- Dérivabilité de la composée de deux fonctions

Propriété

Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a :

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$$

Application

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2x\sqrt{f(x)}} ; x \in D_f \text{ et } f(x) > 0$$

$$(\sin(ax+b))' = a \cdot \cos(ax+b) ; x \in \mathbb{R}$$

$$(\cos(ax+b))' = -a \cdot \sin(ax+b) ; x \in \mathbb{R}$$

$$(\tan(ax+b))' = a \cdot [1 + \tan^2(ax+b)] = \frac{a}{\cos^2(ax+b)} ; ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

Exemple

VII- La fonction dérivée de la fonction réciproque

Théorème

Si f est dérivable en x_0 et $f(x_0) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$

$$\text{et } (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\text{ou encore } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Application:

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n \times \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$\forall x \in I : \quad \left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{n \times \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$$

Exemple

IIX- Tableau des fonctions dérivées des fonctions usuelles

La fonction f	D_f Domaine de définition de f	La fonction dérivée f'	$D_{f'}$ Domaine de définition de f'
$f(x) = a$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{1\}; f(x) = x^n$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$D_f = [0, +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'} =]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$D_f = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$x \in D_g / g(x) \geq 0$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{2x\sqrt{g(x)}}$	$x \in D_g / g(x) > 0$
$f(x) = a$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} f(x) = x^n$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{1\}; f(x) = x^n$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$

IX- Exercices

9-1/ Exercice 1

1. Dans chacun des cas suivantes, étudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 et interpréter le résultat graphiquement :

$$1 \quad \begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2}{x+1} \text{ si } x \neq -1 \\ f(-1) = 5 \end{cases} ; \quad x_0 = -1$$

$$2 \quad \begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x-1} \text{ si } x < 1 \\ f(x) = x^2 + x - 2 \text{ si } x \geq 1 \end{cases} ; \quad x_0 = 1$$

9-2/ Exercice 2

1. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$1 \quad f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$2 \quad f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 1}$$

$$3 \quad f(x) = \left(\frac{x^2 - 2x}{x-1} \right)^4$$

$$4 \quad f(x) = x^3 \times \cos(x^2 - x)$$

$$5 \quad f(x) = x^5 \times \sqrt[3]{x^2 - 3x + 5}$$

9-3/ Exercice 3

1. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$\begin{aligned} 1 \quad f(x) &= \frac{2}{x} + \frac{3x^2+1}{x} \\ 2 \quad f(x) &= \sqrt{x+2} \times (5x-3)^4 \\ 3 \quad f(x) &= \sqrt{\frac{3x-5}{2-x}} \\ 4 \quad f(x) &= \sin^3(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad f(x) &= \sin 2x \cos 3x \\ 6 \quad f(x) &= \tan 3x \\ 7 \quad f(x) &= \sqrt[3]{x^{11}} \\ 8 \quad f(x) &= \sqrt[5]{x^2 - 7x + 12} \end{aligned}$$

9-4/ Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = -x + \sqrt{x^2 - x}$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f .
 2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.
 3. Étudier la dérивabilité à gauche de f au point $x_0 = 0$ puis interpréter le résultat graphiquement.
 4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)+1}{x-1}$, puis interpréter le résultat graphiquement.
 5. Montrer que pour tout x de $]-\infty, 0]$ on a $f'(x) = -1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$ puis déterminer son signe sur $]-\infty, 0[$.
 6. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]1, +\infty[$ puis déterminer son signe sur $]1, +\infty[$.
 7. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f .
- Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $]-\infty, 0]$.
8. Montrer que la restriction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J qu'on déterminera.
 9. Calculer $g(2)$ et $(g^{-1})'(-2 + \sqrt{2})$.

9-5/ Exercice 5

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-8}{x-2} \text{ si } x \in]-\infty; 2[\\ f(x) = \sqrt{x+2} + 10 \text{ si } x \in [2; +\infty[\end{cases}$$

1. Calculer $f(2)$ et $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
2. Est-ce que la fonction f est continue en 2 ?
3. Étudier la continuité de f sur \mathbb{R} .

4. Étudier la dérivabilité de f en 2, et interpréter géométriquement les résultats.

9-6/ Exercice 6

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = x^3 + 3x - 2$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ une seule solution α sur $[0; +\infty[$, et que $\alpha \in]0; 1[$.
2. Donner un encadrement d'amplitude 0,125 de α .
3. En déduire que ($\forall x \in [0; \alpha]$); $f(x) \leq 0$ et ($\forall x \in [\alpha; +\infty[$); $f(x) \geq 0$.
4. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
5. Calculer $f(0)$, $f^{-1}(-2)$ et $(f^{-1})'(-2)$.