

Sommaire

I- Théorème des valeurs intermédiaires

1-1/ Propriété (Théorème des valeurs intermédiaires)

1-2/ Conséquences

II- Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

2-1/ Théorème

2-2/ Relation entre f et sa réciproque f^{-1} 2-3/ Propriétés de la fonction réciproque f^{-1} III- La fonction racine d'ordre n (ou racine $n^{\text{ième}}$)

3-1/ Définition et théorème

3-2/ Cas particuliers

3-3/ Propriétés

3-4/ Limites de la fonction $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$

VI- Puissance rationnelle d'un nombre réel positif

4-1/ Définition

4-2/ Propriétés

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

5-2/ Exercice 2

5-3/ Exercice 3

5-4/ Exercice 4

5-5/ Exercice 5

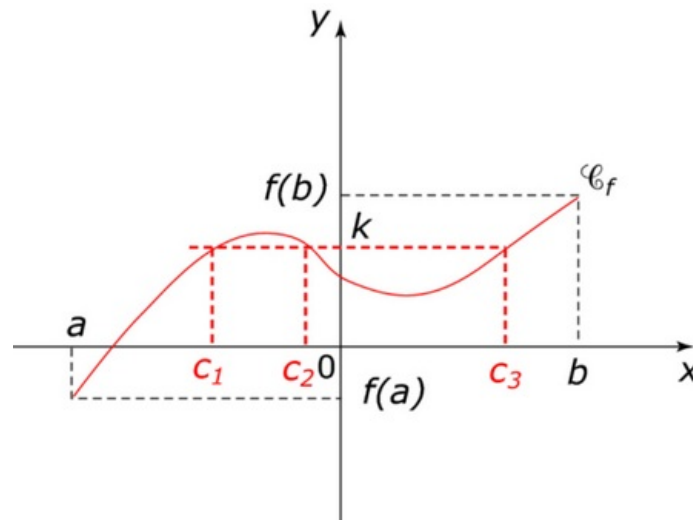
5-6/ Exercice 6

I- Théorème des valeurs intermédiaires

1-1/ Propriété (Théorème des valeurs intermédiaires)

f est une fonction continue sur $[a, b]$.

Pour tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un élément c de $[a, b]$ tel que $f(c) = k$



1-2/ Conséquences

Puisque la fonction f est continue on a $f([a, b]) = [m, M]$ (l'image d'un segment est un segment).

Si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a)f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution c dans $]a, b[$.

Exemples

1-3/ Cas d'une fonction continue et monotone

f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$.

Pour tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un seul un élément c de $[a, b]$ tel que $f(c) = k$

II- Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

2-1/ Théorème

Toute fonction continue et strictement monotone sur I , admet une fonction réciproque définie sur $f(I)$

$f : I \mapsto J$ est une fonction si tout $x \in I$ a une et seule image $y \in J$ et de même si tout $y \in J$ a un et seul antécédent $x \in I$

On définit une autre fonction notée f^{-1} et appelée fonction réciproque de f avec :

$$\begin{aligned}
 f : I &\mapsto J = f(I) \\
 x &\mapsto f(x) = y \text{ et } f^{-1} : J = f(I) \mapsto I \\
 y &\mapsto f^{-1}(y) = x
 \end{aligned}$$

2-2/ Relation entre f et sa réciproque f^{-1}

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in J \end{cases}$$

et

$$\forall x \in I : f^{-1} \circ f(x) = x$$

et

$$\begin{cases} \forall y \in J : f \circ f^{-1}(y) = y \\ \forall x \in I : f^{-1} \circ f(x) = x \end{cases}$$

2-3/ Propriétés de la fonction réciproque f^{-1}

La fonction réciproque f^{-1} est continue sur $J = f(I)$

La fonction réciproque f^{-1} et f varient dans le même sens.

(C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la 1^{er} bissectrice $((D) : y = x)$

III- La fonction racine d'ordre n (ou racine $n^{\text{ième}}$)

3-1/ Définition et théorème

La fonction $f(x) = x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$

Sa fonction réciproque f^{-1} sera notée $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ et appelée La fonction racine d'ordre n (ou la fonction racine $n^{\text{ième}}$)

On l'appelle $\sqrt[n]{x}$ la racine d'ordre n du réel positif x

3-2/ Cas particuliers

Cas $n = 1$ on a $f^{-1}(x) = \sqrt[1]{x} = x$ (pas d'importance). Donc on prend $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$

Cas $n = 2$ on a $f^{-1}(x) = \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ (racine carrée)

Cas $n = 3$ on a $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ (racine cubique ou racine d'ordre 3)

3-3/ Propriétés

Soient a et b de $\mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$			
$\sqrt[n]{1} = 1 ; \sqrt[n]{0} = 0$	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	$\sqrt[n]{a^n} = a$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$	$\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a \leq b$	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^2}$
$\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n^2]{a}$	$(b > 0) ; \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$	$(b > 0) ; \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	

3-4/ Limites de la fonction $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ et } l \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$$

Les deux propriétés restent vraies si on remplace $x \rightarrow x_0$ par $x \rightarrow x_0^-$ ou $x \rightarrow x_0^+$ ou $x \rightarrow x + \infty$

Exemples

VI- Puissance rationnelle d'un nombre réel positif

4-1/ Définition

$x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$

On pose $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

Le nombre $\sqrt[n]{x^m}$ son écriture sera de la façon suivante $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ ou encore par $\sqrt[n]{x^m} = x^r$

x^r est appelé puissance rationnelle du nombre réel positif x d'exposant r
($0^r = 0$; $r \neq 0$)

4-2/ Propriétés

$\forall a \in \mathbb{R}^{+*} \text{ et } \forall b \in \mathbb{R}^{+*}$			
$a^r > 0 \text{ avec } r, r' \in \mathbb{Q}$	$a^r = b^{r'} \Leftrightarrow r = r'$	$a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$	$a^r \times b^r = (a \times b)^r$
$(a^r)^{r'} = a^{r \times r'}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$	$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$	$\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^6 + 2x^4 - 1$.

1. Montrer que l'équation $x^6 + 2x^4 - 1 = 0$ admet au moins une solution sur $]0; 1[$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

2. Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note cette solution par α .
4. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[1; +\infty[$.

5-2/ Exercice 2

On considère la fonction f définie par: $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

1. Déterminer D_f , puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .

2. Montrer que: $(\forall x \in D_f) f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

3. Dresser le tableau de variation de f .

4. Déterminer $f(]-\infty; -2])$, $f([-2; -1[)$, $f(]-1; 0])$ et $f([0; +\infty[)$.

Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty; -2]$.

5. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

6. Montrer que : $(\forall x \in J) g^{-1}(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$.

5-3/ Exercice 3

1. Calculer les limites suivantes :

1- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt[3]{x+7}}{x-1}$

2- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{3x-5}}$

3- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{5x^2 + x + 1} + 2x$

4- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^3 + 3x + 1} - 2x$

5- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 2}{3x^2 + \sqrt[3]{2x^2 + 1} - 5}$

6- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x + 1}{\sqrt[3]{8x^2 + 3} - \sqrt[3]{8x^2 + 1}}$

5-4/ Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}$

1. Montrer que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Montrer que f est continue sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

3. Montrer que $(\forall x > 1) f'(x) = \frac{2x(x^2-2)}{\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x^2-1}+1)}$.

4. Dédire les variations de f sur $[1; +\infty[$.

Soit g la restriction de f sur $[\sqrt{2}; +\infty[$.

5. Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un interval J à déterminer.

6. Montrer que $(\forall x \in [\sqrt{2}; +\infty[) : g(x) = (\sqrt{x^2 - 1} - 1)^2$.

7. Dédire $g^{-1}(x)$, $\forall x \in J$.

5-5/ Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique a dans $]-\frac{1}{2}; 0[$.
3. Calculer $f\left(\frac{-1}{4}\right)$, puis déduire un encadrement de a d'amplitude 0,25.
4. Montrer que $\sqrt{a+1} = \frac{-2a}{a+1}$

5-6/ Exercice 6

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x} - 2\sqrt{x+1}$.

1. Justifier que $D_f = [-1; 0[\cup]0; +\infty[$.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
3. Montrer que f est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]\frac{1}{4}; 1[$.
5. Vérifier que $4\alpha^3 + 4\alpha^2 - 1 = 0$.