AlloSchool

Mathématiques : 2 Bac SPC-SVT-STE-STM

Séance 8 (Fonctions logarithmiques)

**Professeur : Mr CHEDDADI Haitam**

Sommaire

I- Fonction logarithme népérienne

1-1/ Définition

1-2/ Conséquences

1-3/ Signe de ln(x)

II- Propriétés algébriques

III- Limites

3-1/ Propriétés

3-2/ Remarques

IV- Étude de la fonction $f(x) = lnx$

V- Fonction de la forme $f(x) = ln(u(x))$

5-1/ Définition

5-2/ Vocabulaire et remarque

VI- Fonction logarithme de base a

6-1/ Définition

6-2/ Cas particuliers

6-3/ Propriétés

VII- Exercices

7-1/ Exercice 1

7-2/ Exercice 2

7-3/ Exercice 3

7-4/ Exercice 4

7-5/ Exercice 5

7-6/ Exercice 6

# I- Fonction logarithme népérienne

## 1-1/ Définition

La fonction primitive $F$ de $f(x) = \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 $(F(1) = 0)$ s'appelle la fonction logarithme népérienne

Elle est notée $F(x) = \ln(x)$ ou $F(x) = \ln x$.

Avec $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$

**Exemple**

## 1-2/ Conséquences

$\ln 1 = 0$

La fonction $f(x) = \ln x$ est définie sur $]0, +\infty[$.

La fonction $f(x) = \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ (car $(\ln x)' = \frac{1}{x}$).

La fonction $f(x) = \ln x$ est continue sur $]0, +\infty[$ (car la fonction logarithme népérienne est dérivable).

La fonction $f(x) = \ln x$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (car $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$).

## 1-3/ Signe de ln(x)

Soit $x \in ]0, +\infty[$

Si : $x = 1$, donc : $\ln 1 = 0$.

Puisque $x \to \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

Si : $x \in ]1, +\infty[$, donc : $x > 1 \Rightarrow \ln x > \ln 1 = 0$

Si : $x \in ]0, 1[$, donc : $x < 1 \Rightarrow \ln x < \ln 1 = 0$

# II- Propriétés algébriques

Pour tous $a > 0$ et $b > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$\ln a^r = r.\ln a$

**Exemple**

# III- Limites

## 3-1/ Propriétés

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ | $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ |
| $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ | $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ |
| $\lim\limits_{x \to 0^+} xlnx = 0^-$ | $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ |

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n lnx = 0^-$ | $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ |

### 3-2/ Remarques

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ , donc la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote verticale : c'est la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées).

$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ , donc la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique (à déterminer ).

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ , donc la courbe admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

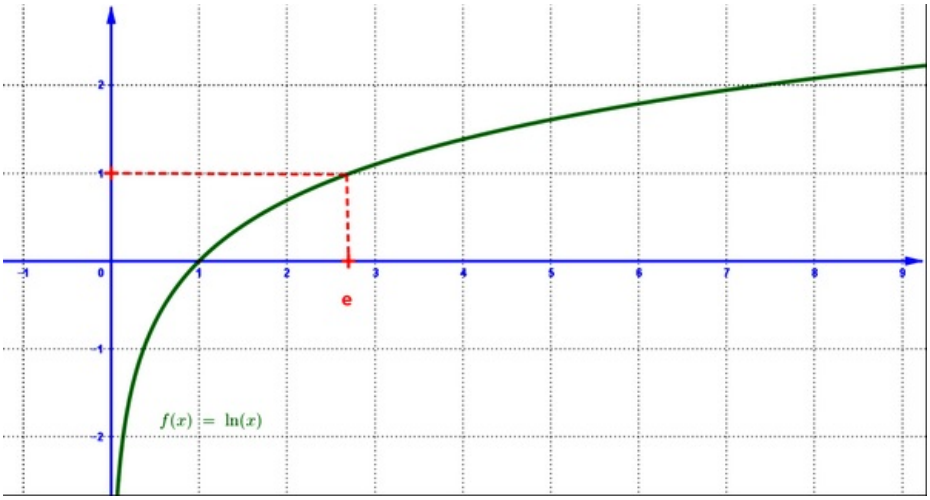
## IV- Étude de la fonction $f(x) = lnx$

Domaine de définition :

Continuité :

Limites :

Sens de variation de f :




## V- Fonction de la forme $f(x) = ln(u(x))$

### 5-1/ Définition

On pose $g(x) = \ln x$ et la fonction $u(x)$, donc : $f(x) = g \circ u(x) = g(u(x)) = \ln(u(x))$.

Conclusion : la fonction $f(x) = \ln(u(x))$ est la composée de deux fonctions.

Domaine de définition de f : $x \in D_f \Leftrightarrow (x \in D_u \text{ et } u(x) > 0)$.

Si de plus la fonction $u(x)$ est dérivable on a : $[\ln(u(x))]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

De même on a : $[\ln(|u(x)|)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

**Exemple**

### 5-2/ Vocabulaire et remarque

Soit $u$ une fonction dérivable sur $I$ et $\forall x \in I$ : $u(x) \neq 0$.

La fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ est appelée la dérivée logarithmique de la fonction $u$ sur $I$.

Puisque $[\ln(|u(x)|)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$, donc les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur $I$ sont les fonctions de la forme $F(x) = \ln|u(x)| + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

# VI- Fonction logarithme de base a

## 6-1/ Définition

Soit $a \in ]0,1[\cup]1,+\infty[$ (c.à.d. a strictement positif et différent de 1).

La fonction définie par :

$$\begin{aligned} f \ : \ ]0,+\infty[ &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$

S'appelle la fonction logarithme de base a.

On note cette fonction par $f = \log_a$ d'où : $f(x) = \log_a(x)$

## 6-2/ Cas particuliers

### Cas a=e

$\log_e(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$ ,donc le logarithme de base $e$ est le logarithme népérien.

### Cas a=10

On obtient la fonction $f(x) = \log_{10}(x)$ qui s'appelle la fonction logarithme décimale.

On note $\log_{10} = \log$

On a :

$\log(10^r) = r$

$\log(10) = 1$

$\log(1) = 0$

### Exemple

## 6-3/ Propriétés

Soit $a \in ]0,1[\cup]1,+\infty[$ et pour tout $x, y \in ]0,+\infty[$ on a :

$$\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$
$$\log_a(x^r) = r \times \log_a(x) \ ; \ \ (r \in \mathbb{Q})$$
$$\log_a\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2} \times \log_a(x)$$
$$\log_a\left(\sqrt[3]{x}\right) = \frac{1}{3} \times \log_a(x)$$

# VII- Exercices

## 7-1/ Exercice 1

Soit la fonction $g$ définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$.

1. Montrer que $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ pour tout $x$ de $]0, +\infty[$, et en déduire que la fonction $g$ est croissante sur $]0, +\infty[$.
2. Vérifier que $g(1) = 0$, puis en déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in ]0, 1]$ et $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1, +\infty[$.

On considère $f$ définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$.

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité 1 cm)

3. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, puis interprété géométriquement ce résultat.
4. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
5. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(1+\ln x)^2}{x} = 0$ (on pourra poser $t = \sqrt{x}$), puis montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.
6. Déterminer la branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
7. Montrer que $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ pour tout $x \in ]0, +\infty[$, puis en déduire que la fonction $f$ est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.
8. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur $]0, +\infty[$ puis en déduire que $f(x) \geq 2$ pour tout $x \in ]0, +\infty[$.
9. Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de $f$ dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (on admettra que la courbe de $f$ possède un seul point d'inflexion, on ne le déterminera pas).

## 7-2/ Exercice 2

Soit la fonction $g$ définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{2}{x} - 1 + 2\ln x$.

On considère le tableau de variations de la fonction $g$ sur $]0, +\infty[$ :

| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| g'(x) | ‖ | − 0 + | |
| g(x) | ‖ | $+\infty$ ↘ g(1) ↗ | $+\infty$ |

1. Calculer $g(1)$.
2. En déduire à partir du tableau que $g(x) > 0$ pour tout $x \in ]0, +\infty[$.

On considère $f$ définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 3 - 3x + 2(x+1)\ln x$.

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité 2 cm)

3. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, et interpréter géométriquement ce résultat.
4. Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ (pour le calcul de la limite on pourra utiliser l'écriture suivante $f(x) = x\left[\frac{3}{x} - 3 + 2\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln x\right]$)
5. Montrer que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont la direction
est celle de l'axe des ordonnées.
6. Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout $x \in ]0, +\infty[$.
7. En déduire que la fonction $f$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, et dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur $]0, +\infty[$.
8. Montrer que $I(0, 1)$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
9. Montrer que $y = x$ est l'équation de la droite $(T)$ tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point $I$.
10. Construire dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ la droite $(T)$ et la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

## 7-3/ Exercice 3

Soit la fonction $g$ définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x(x-1) + \ln x$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in ]0, +\infty[$.
2. Étudier les variations de la fonction $g$.
3. Calculer $g(1)$, puis déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Soit $f$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (x-1)^2 + \ln^2(x)$.

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité 1 cm)

4. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, et interpréter le résultat géométriquement.
5. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis étudier la branche infinie de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
6. Montrer que $\forall x \in \left]0, +\infty\right[ \ : \ f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$.
7. En déduire les variations de $f$ sur $D_f$.
8. Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit $h$ la restriction de $f$ à l'intervalle $I = ]0, 1]$.

9. Montrer que la fonction $h$ admet une fonction réciproque $h^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.
10. Tracer $(\mathscr{C}_{h^{-1}})$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

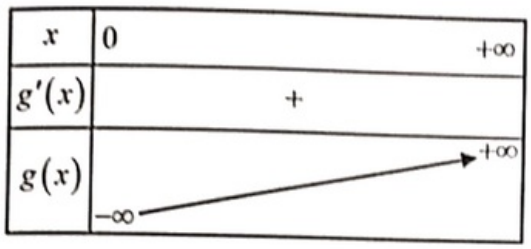
## 7-4/ Exercice 4

### Partie 1

Soit $g$ la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2\ln x$

1. Vérifier que $g(1) = 0$.

Soit le tableau de variations de la fonction $g$ :




2. Montrer que $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in ]0;1]$, et que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1;+\infty[$.

## Partie 2

On considère la fonction $f$ définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x$$

Et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(0; \vec{i}; \vec{j}\right)$. (Unité : 1cm)

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
3. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite $(D)$ d'équation $y = x$.
4. Montrer que : $(\forall x \in ]0,+\infty[)$ : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
5. En déduire que la fonction $f$ est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.
6. Dresser le tableau de variations de $f$ sur $[1;+\infty[$.
7. Résoudre dans l'intervalle $]0,+\infty[$ l'équation $\left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x = 0$.
8. En déduire que $\mathscr{C}_f$ coupe la droite $(D)$ en deux points dont on déterminera les coordonnées,
9. Montrer quo pour tout $x \in [1;2]$ : $f(x) \leq x$, et on déduire la position relative de la courbe $(D)$ par rapport à la droite sur l'intervalle $[1;2]$.
10. Construire $(D)$ et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $\left(0; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

(On admet que $\mathscr{C}_f$ possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre $2,4$ et $2,5$).

## 7-5/ Exercice 5

On considère $f$ définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{\ln x}$.

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Montrer que $f$ est continue sur $[1,+\infty[$.
2. Étudier la dérivabilité de $f$ à droite en $1$, et interpréter géométriquement le résultat

trouvé.

3. Dresser le tableau de variation de $f$.
4. Déterminer l'intersection de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et $(\Delta)$ : $y = x$.
5. Tracer $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et $(\Delta)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
6. Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $g$ définie sur $J = [0; +\infty[$.

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

7. Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_n \leq e$
8. Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.
9. En déduire que $(u_n)$ est convergente et trouver sa limite.

## 7-6/ Exercice 6

### Partie 1

Soit $g$ la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(1+x)$

1. Dresser le tableau de variation de $g$.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]-1, +\infty[$ deux solutions 0 et $\alpha$, et vérifier que $3,8 < \alpha < 4$.
3. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in ]-1; +\infty[$.
4. Montrer que pour tout $x \in ]-1; +\infty[$, on a $g(x) \leq 1$.

### Partie 2

Soit $f$ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

On désigne par $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

1. Montrer que $f$ est continue sur $[0; +\infty[$.
2. Étudier la dérivabilité de $f$ à droite en 0.
3. Montrer que : $(\forall x > 0)$ : $f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$
4. Dresser le tableau de variation de $f$.
5. Vérifier que $f(\alpha) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$.
6. Tracer la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.