Mathématiques : 2 Bac SPC-SVT-STE-STM

Séance 8 (Fonctions logarithmiques)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Fonction logarithme népérienne

1-1/ Définition

La fonction primitive F de $f\left(x\right) = \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $\left]0, +\infty\right[$ qui s'annule en $1\ \left(F\left(1\right) = 0\right)$ s'appelle la fonction logarithme népérienne

Elle est notée $F\left(x\right) = \ln\left(x\right)$ ou $F\left(x\right) = \ln x$.

Avec $F'\left(x\right) = f\left(x\right) \Leftrightarrow \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$

Exemple

1-2/ Conséquences

$\ln 1 = 0$

La fonction $f\left(x\right) = \ln x$ est définie sur $\left]0, +\infty\right[$.

La fonction $f\left(x\right) = \ln x$ est dérivable sur $\left]0, +\infty\right[$ (car $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$).

La fonction $f\left(x\right) = \ln x$ est continue sur $\left]0, +\infty\right[$ (car la fonction logarithme népérienne est dérivable).

La fonction $f\left(x\right) = \ln x$ est strictement croissante sur $\left]0, +\infty\right[$ (car $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x} > 0$).

1-3/ Signe de ln(x)

Soit $x \in \left]0, +\infty\right[$

Si : $x = 1$, donc : $\ln 1 = 0$.

Puisque $x \to \ln(x)$ est strictement croissante sur $\left]0, +\infty\right[$

Si : $x \in \left]1, +\infty\right[$, donc : $x > 1 \Rightarrow \ln x > \ln 1 = 0$

Si : $x \in \left]0, 1\right[$, donc : $x < 1 \Rightarrow \ln x < \ln 1 = 0$

II- Propriétés algébriques

Pour tous $a > 0$ et $b > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$\ln a^r = r.\ln a$

Exemple

III- Limites

3-1/ Propriétés

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} xlnx = 0^-$ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n lnx = 0^-$	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

3-2/ Remarques

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, donc la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une asymptote verticale : c'est la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées).

$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, donc la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une branche parabolique (à déterminer).

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc la courbe admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

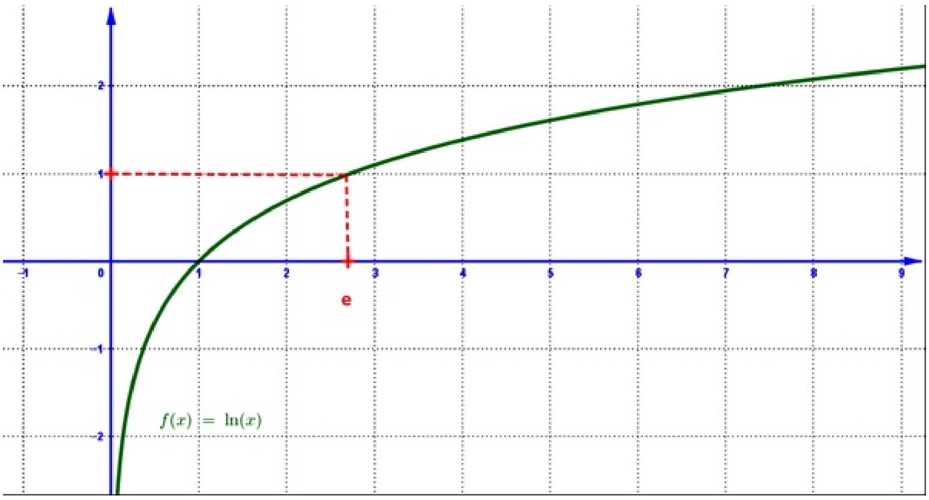
IV- Étude de la fonction $f(x) = lnx$

Domaine de définition :

Continuité :

Limites :

Sens de variation de f :



V- Fonction de la forme $f(x) = ln(u(x))$

5-1/ Définition

On pose $g(x) = \ln x$ et la fonction $u(x)$, donc :
$f(x) = g \circ u(x) = g(u(x)) = \ln(u(x))$.

Conclusion : la fonction $f(x) = \ln(u(x))$ est la composée de deux fonctions.

Domaine de définition de f : $x \in D_f \Leftrightarrow (x \in D_u \; et \; u(x) > 0)$.

Si de plus la fonction $u(x)$ est dérivable on a : $[\ln(u(x))]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

De même on a : $\left[\ln\left(\left|u\left(x\right)\right|\right)\right]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple

5-2/ Vocabulaire et remarque

Soit u une fonction dérivable sur I et $\forall x \in I\ :\ u\left(x\right) \neq 0$.

La fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ est appelée la dérivée logarithmique de la fonction u sur I

.

Puisque $\left[\ln\left(\left|u\left(x\right)\right|\right)\right]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$, donc les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions de la forme $F\left(x\right) = \ln\left|u\left(x\right)\right| + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

VI- Fonction logarithme de base a

6-1/ Définition

Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ (c.à.d. a strictement positif et différent de 1).

La fonction définie par :

$$\begin{aligned} f\ :\ ]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\to f\left(x\right) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$

S'appelle la fonction logarithme de base a.

On note cette fonction par $f = \log_a$ d'où : $f\left(x\right) = \log_a\left(x\right)$

6-2/ Cas particuliers

Cas a=e

$\log_e\left(x\right) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln\left(x\right)$,donc le logarithme de base e est le logarithme népérien.

Cas a=10

On obtient la fonction $f\left(x\right) = \log_{10}\left(x\right)$ qui s'appelle la fonction logarithme décimale.

On note $\log_{10} = \log$

On a :

$\log\left(10^r\right) = r$
$\log\left(10\right) = 1$
$\log\left(1\right) = 0$

Exemple

6-3/ Propriétés

Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ et pour tout $x, y \in]0,+\infty[$ on a :

$$\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$
$$\log_a(x^r) = r \times \log_a(x)\ ;\ \ (r \in \mathbb{Q})$$
$$\log_a\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2} \times \log_a(x)$$
$$\log_a\left(\sqrt[3]{x}\right) = \frac{1}{3} \times \log_a(x)$$

VII- Exercices

7-1/ Exercice 1

Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$.

1. Montrer que $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ pour tout x de $]0,+\infty[$, et en déduire que la fonction g est croissante sur $]0,+\infty[$.
2. Vérifier que $g(1) = 0$, puis en déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0,1]$ et $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1,+\infty[$.

On considère f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = (1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$.

Soit $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité 1 cm)

3. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, puis interprété géométriquement ce résultat.
4. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
5. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(1+\ln x)^2}{x} = 0$ (on pourra poser $t = \sqrt{x}$), puis montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.
6. Déterminer la branche infinie de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au voisinage de $+\infty$.
7. Montrer que $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$, puis en déduire que la fonction f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$.
8. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$ puis en déduire que $f(x) \geq 2$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
9. Construire la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de f dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (on admettra que la courbe de f possède un seul point d'inflexion, on ne le déterminera pas).

7-2/ Exercice 2

Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \frac{2}{x} - 1 + 2\ln x$.

On considère le tableau de variations de la fonction g sur $]0,+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|\|$	$+\infty \searrow$	$g(1)$	$\nearrow +\infty$	

1. Calculer $g(1)$.
2. En déduire à partir du tableau que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

On considère f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 3 - 3x + 2(x+1)\ln x$.

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité 2 cm)

3. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, et interpréter géométriquement ce résultat.
4. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (pour le calcul de la limite on pourra utiliser l'écriture suivante $f(x) = x\left[\frac{3}{x} - 3 + 2\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln x\right]$)
5. Montrer que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont la direction
   est celle de l'axe des ordonnées.
6. Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
7. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, et dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
8. Montrer que $I(0,1)$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
9. Montrer que $y = x$ est l'équation de la droite (T) tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point I.
10. Construire dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ la droite (T) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$
    .

7-3/ Exercice 3

Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x(x-1) + \ln x$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Calculer $g(1)$, puis déduire le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = (x-1)^2 + \ln^2(x)$.

Soit $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité 1 cm)

4. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, et interpréter le résultat géométriquement.
5. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis étudier la branche infinie de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au voisinage de $+\infty$.
6. Montrer que $\forall x \in \left]0, +\infty\right[\; : \; f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$.
7. En déduire les variations de f sur D_f.
8. Tracer $\left(\mathscr{C}_f\right)$ dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I =]0, 1]$.

9. Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
10. Tracer $(\mathscr{C}_{h^{-1}})$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

7-4/ Exercice 4

Partie 1

Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par :
$g(x) = x^2 + x - 2 + 2\ln x$

1. Vérifier que $g(1) = 0$.

Soit le tableau de variations de la fonction g :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Montrer que $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0; 1]$, et que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1; +\infty[$.

Partie 2

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x$$

Et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(0; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

(Unité : 1cm)

1. Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. Montrer que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
3. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite (D) d'équation $y = x$.
4. Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[)\ :\ f\text{'}(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
5. En déduire que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.
6. Dresser le tableau de variations de f sur $[1; +\infty[$.
7. Résoudre dans l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation $\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0$.
8. En déduire que $\mathscr{C}_f$ coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées,
9. Montrer quo pour tout $x \in [1; 2]\ :\ f(x) \leq x$, et on déduire la position relative de la courbe (D) par rapport à la droite sur l'intervalle $[1; 2]$.
10. Construire (D) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $\left(0;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

(On admet que $\mathscr{C}_f$ possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre $2,4$ et $2,5$).

7-5/ Exercice 5

On considère f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{\ln x}$.

Soit $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}\ , \vec{j}\right)$.

1. Montrer que f est continue sur $[1, +\infty[$.
2. Étudier la dérivabilité de f à droite en 1, et interpréter géométriquement le résultat trouvé.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer l'intersection de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et (Δ) : $y = x$.
5. Tracer $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et (Δ) dans le repère $\left(O, \vec{i}\ , \vec{j}\right)$.
6. Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $J = [0; +\infty[$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

7. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_n \leq e$
8. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
9. En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

7-6/ Exercice 6

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $g\left(x\right)=\frac{2x}{x+1}-\ln\left(1+x\right)$

1. Dresser le tableau de variation de g.
2. Montrer que l'équation $g\left(x\right)=0$ admet dans l'intervalle $]-1,+\infty[$ deux solutions 0 et α, et vérifier que $3,8<\alpha<4$.
3. En déduire le signe de $g\left(x\right)$ pour tout $x\in]-1;+\infty[$.
4. Montrer que pour tout $x\in]-1;+\infty[$, on a $g\left(x\right)\leq 1$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f\left(x\right)=\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$ si $x>0$ et $f\left(0\right)=0$.

On désigne par $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ du plan.

1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
2. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.
3. Montrer que : $(\forall x>0)$: $f\text{'}\left(x\right)=\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Vérifier que $f\left(\alpha\right)=\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$.
6. Tracer la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ dans le repère $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.