

Sommaire

I- Limites des fonctions x^n ($n \in \mathbb{N}^*$) et \sqrt{x} et leur inverses

II- Limites des fonctions polynômes et rationnelles

2-1/ Limite d'une fonction polynôme

2-2/ Limite d'une fonction rationnelle

III- Limites des fonctions trigonométriques

IV- Limites des fonctions de type $\sqrt{u(x)}$

V- Théorème de comparaison

VI- Limites et opérations

VII- La dérivabilité

7-1/ Fonction dérivable en un point

7-2/ Dérivée des fonctions usuelles

7-3/ Opérations sur les fonctions dérivées- dérivée d'une fonction composée

7-4/ Dérivée et sens de variation

IIIX- Exercices

8-1/ Exercice 1

8-2/ Exercice 2

8-3/ Exercice 3

8-4/ Exercice 4

I- Limites des fonctions x^n ($n \in \mathbb{N}^*$) et \sqrt{x} et leur inverses

--	--

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Si n est un nombre paire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

Si n est un nombre impaire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$$

II- Limites des fonctions polynômes et rationnelles

2-1/ Limite d'une fonction polynôme

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ et en $-\infty$ est celle de son terme de plus haut degré

Exemple

2-2/ Limite d'une fonction rationnelle

La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ et en $-\infty$ est celle du quotient des termes de plus haut degré

III- Limites des fonctions trigonométriques

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

IV- Limites des fonctions de type $\sqrt{u(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{u(x)} = \sqrt{l}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{u(x)} = +\infty$$

Ces résultats restent valables, à droite en x_0 , à gauche en x_0 , en $+\infty$ et en $-\infty$

V- Théorème de comparaison

$$\left. \begin{array}{l} U(x) \leq f(x) \leq V(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} U(x) = l \\ \lim_{x \rightarrow x_0} V(x) = l \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$$\left. \begin{array}{l} |f(x) - l| \leq V(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} V(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \leq U(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} U(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} U(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} U(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

Ces résultats restent valables, à droite en x_0 , à gauche en x_0 , en $+\infty$ et en $-\infty$

VI- Limites et opérations

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) + f(x)]$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	$\ell < 0$		$\ell > 0$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \times f(x)]$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell < 0$		$\ell > 0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

Ces résultats restent valable, à droite en x_0 , à gauche en x_0 , en $+\infty$ et en $-\infty$

VII- La dérivabilité

7-1/ Fonction dérivable en un point

Définition

On dit qu'une fonction f est dérivable en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie.

Cette limite est appelée le nombre dérivé de f en x_0 , on le note $f'(x_0)$.

Exemple

7-2/ Dérivée des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	
k	0	$(k \in \mathbb{R})$
x	1	
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	
x^r	rx^{r-1}	$(r \in \mathbb{Z}^* - \{1\})$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	

7-3/ Opérations sur les fonctions dérivées- dérivée d'une fonction composée

$$\begin{aligned}
 (u + v)' &= u' + v' \\
 (ku)' &= k(u)' \quad (k \in \mathbb{R}) \\
 (uv)' &= u'v + uv' \\
 \left(\frac{1}{v}\right)' &= \frac{-v'}{v^2} \\
 \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\
 (u \circ v)' &= [u' \circ v] \times v' \\
 (u^n)' &= nu' \cdot u^{n-1} \\
 (\sqrt{u})' &= \frac{u'}{2\sqrt{u}}
 \end{aligned}$$

7-4/ Dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :

f est croissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$

f est décroissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$

f est constante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) = 0$

IIX- Exercices

8-1/ Exercice 1

Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

1. Étudier la limite de f en $x_0 = -1$

2. Calculer les limites suivantes :

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+1}{(x-1)^2}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{(x-1)^2}$$

$$F = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 5x^2 - 7x^4$$

$$G = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$$

$$H = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$$

$$D = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$$

$$E = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2}$$

$$I = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2-x}{2x^3+2x-4}$$

$$J = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$$

8-2/ Exercice 2

1. Calculer les limites suivantes :

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+x-1}{x^5-5}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2-x-4}{\sqrt{x+5}+2x}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{10-5x}{x^2-6x+9}$$

$$D = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^3+x-1}}{2x-1}$$

$$E = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^4 - 2x^3 + 1} - x$$

$$F = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 - x + 1} + 3x$$

8-3/ Exercice 3

1. Calculer les limites suivantes :

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 2} - 2x$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \sin 3x}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\tan(x-2)}{x^2-4}$$

$$D = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x+4} - \sqrt{5x-4}}{\sqrt{x+5} - 3}$$

8-4/ Exercice 4

1. Déterminer la fonction dérivée de f et étudier sa monotonie :

$$1 \quad f(x) = x^2 + 3x + 1$$

$$2 \quad f(x) = \sqrt{x} + x^3$$

$$3 \quad f(x) = \frac{4x-3}{2x-1}$$

$$4 \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$