

Sommaire

I- La racine carrée d'un nombre réel positif

1-1/ Définition

1-2/ Propriété (Le carré d'une racine carrée)

1-3/ Remarques importantes

II- Résolution de l'équation $x^2 = a$ 2-1/ $a > 0$ 2-2/ $a = 0$ 2-3/ $a < 0$

III- Les opérations sur les racines carrées

3-1/ Produit de deux racines carrées

3-2/ Quotient de deux racines carrées

3-3/ Rendre un dénominateur rationnel ou supprimer le radical au dénominateur

IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

4-2/ Exercice 2

4-3/ Exercice 3

4-4/ Exercice 4

4-5/ Exercice 5

4-6/ Exercice 6

I- La racine carrée d'un nombre réel positif

1-1/ Définition

Soit a un nombre réel positif ou nul (c'est-a-dire $a \geq 0$).La racine carrée de a est le nombre réel positif dont le carré est égale à a , elle est notée \sqrt{a} .

Le symbole $\sqrt{\quad}$ s'appelle : symbole radical.

1-2/ Propriété (Le carré d'une racine carrée)

Soit a un nombre réel tel que $a > 0$.

$$\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a \text{ et } \sqrt{(-a)^2} = a$$

Exemple

1-3/ Remarques importantes

La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas ($\sqrt{-9}$ n'existe pas).

La racine carrée d'un nombre n'est jamais égale à un nombre négatif ($\sqrt{25} \neq -5$).

L'opposé de \sqrt{a} (avec $a \geq 0$) est $-\sqrt{a}$. (L'opposé de $\sqrt{11}$ est $-\sqrt{11}$).

$$\sqrt{0} = 0 \text{ et } \sqrt{1} = 1$$

1-4/ Les racines carrées parfaites

$$\begin{aligned} \sqrt{1} = 1 & ; \sqrt{4} = 2 & ; \sqrt{9} = 3 & ; \sqrt{16} = 4 & ; \sqrt{25} = 5 & ; \sqrt{36} = 6 & ; \sqrt{49} = 7 \\ \sqrt{64} = 8 & ; \sqrt{81} = 9 & ; \sqrt{100} = 10 & ; \sqrt{121} = 11 & ; \sqrt{144} = 12 & ; \sqrt{169} = 13 \\ \sqrt{196} = 14 & ; \sqrt{225} = 15 & ; \sqrt{256} = 16 & ; \sqrt{289} = 17 & ; \sqrt{324} = 18 & ; \sqrt{361} = 19 & ; \sqrt{400} = 20 \end{aligned}$$

II- Résolution de l'équation $x^2 = a$

2-1/ $a > 0$

L'équation $x^2 = a$ est respectivement équivalente à :

$$\begin{aligned} x^2 - a &= 0 \\ \Rightarrow x^2 - \sqrt{a}^2 &= 0 \\ \Rightarrow (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) &= 0 \\ \Rightarrow (x - \sqrt{a}) = 0 \text{ ou } (x + \sqrt{a}) &= 0 \\ \Rightarrow x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a} \end{aligned}$$

Donc cette équation admet deux solutions: \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$.

2-2/ $a = 0$

L'équation $x^2 = a$ est respectivement équivalente à $x^2 = 0$, ce qui signifie que $x = 0$.

Donc cette équation admet pour solution le nombre 0.

2-3/ $a < 0$

L'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.

III- Les opérations sur les racines carrées

3-1/ Produit de deux racines carrées

Propriété

Soient a et b deux nombres réels positifs.

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

Exemple

Extraire un carré parfait

Soient a et b deux nombres réels positifs non nuls.

$$\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$$

Exemple

3-2/ Quotient de deux racines carrées

Propriété

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \geq 0$ et $b > 0$.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Exemple

3-3/ Rendre un dénominateur rationnel ou supprimer le radical au dénominateur

Propriété 1

Soient a et b et k deux nombres réels tels que $b > 0$.

$$\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b} ; \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} ; \frac{a}{k\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{kb}$$

Exemple

Propriété 2 (Expression du conjugué)

Pour supprimer le radical au dénominateur, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Le conjugué de $a - b$ est $a + b$, et le conjugué de $a + b$ est $a - b$.

Exemple

IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

Calculer:

| | | |
|---|--|---|
| $\sqrt{(-3)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ $(-\sqrt{7})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ $(2\sqrt{5})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ $(\sqrt{19})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ | $\sqrt{81} = \underline{\hspace{2cm}}$ $\sqrt{121} = \underline{\hspace{2cm}}$ $\sqrt{0,49} = \underline{\hspace{2cm}}$ $\sqrt{15^2 - 9^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ | $\sqrt{2^2 \times 5^4} = \underline{\hspace{2cm}}$ $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ $\sqrt{\frac{49}{36}} = \underline{\hspace{2cm}}$ $\left(\frac{-\sqrt{7}}{3}\right)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ |
| | | |

$$\sqrt{\sqrt{169} - \sqrt{144}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{9 + \sqrt{49}}}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

4-2/ Exercice 2

Simplifier sous la forme de $a\sqrt{b}$ tel que a et b sont des nombres réels et $b \geq 0$:

$$A = -3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$B = -2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$C = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 9\sqrt{5} + \sqrt{5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$D = (\sqrt{\sqrt{5} - 2}) \times (\sqrt{\sqrt{5} + 2}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$E = (\sqrt{2\sqrt{7} - 2\sqrt{3}}) \times (\sqrt{2\sqrt{7} + 2\sqrt{3}}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

4-3/ Exercice 3

1. Simplifier sous la forme de $a\sqrt{b}$ tel que a et b sont des nombres réels et $b \geq 0$:

$$A = \sqrt{80} + 3\sqrt{125} - \sqrt{45} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$B = 2\sqrt{18} - 5\sqrt{8} + \sqrt{200} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$C = \sqrt{99} - \sqrt{176} + 2\sqrt{44} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$D = -\sqrt{27} + \sqrt{75} - 4\sqrt{48} = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. Calculer :

$$E = \sqrt{150} \times \sqrt{\frac{3}{162}} =$$

$$F = \sqrt{\frac{3}{10}} \times \sqrt{\frac{270}{8}} =$$

$$G = \sqrt{\frac{8}{27}} \times \sqrt{\frac{3}{50}} =$$

4-4/ Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

$$x^2 = 16$$

$$x^2 = -4$$

$$-5x^2 = -25$$

$$\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$$

$$\frac{2}{9}x^2 = 2$$

$$5 + 2x^2 = 3$$

4-5/ Exercice 5

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = (\sqrt{75} - \sqrt{98}) (5\sqrt{3} + 7\sqrt{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$B = (3 + \sqrt{11})^2 - (3 - \sqrt{11})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$C = (\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}) (\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$D = \frac{2\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + \sqrt{12}}{\sqrt{75} + \sqrt{48} - 7\sqrt{3}} =$$

2. Écrire les quotients suivants sans radical au dénominateur :

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}} =$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{-10} =$$

$$\frac{3\sqrt{5}}{-4} =$$

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}} =$$

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} + 2\sqrt{3}} =$$

4-6/ Exercice 6

On pose :

$$A = 2 + 3\sqrt{5}$$

$$B = 49 + 12\sqrt{5}$$

$$C = 49 - 12\sqrt{5}$$

- 1) Montrer que $\sqrt{B} = A$
- 2) Dédire \sqrt{C}
- 3) Calculer $\sqrt{B} \times \sqrt{C}$
- 4) Calculer $\sqrt{B} + \sqrt{C}$
- 5) Calculer $\sqrt{B} - \sqrt{C}$