Mathématiques : 3ème Année Collège

Séance 3 (Racines carrées)

Professeur : Mr BENGHANI Youssef

‹

Sommaire

I- La racine carrée d’un nombre réel positif

1-1/ Définition

1-2/ Propriété (Le carré d’une racine carrée)

1-3/ Remarques importantes

II- Résolution de l’équation $x^2 = a$

2-1/ $a > 0$

2-2/ $a = 0$

2-3/ $a < 0$

III- Les opérations sur les racines carrées

3-1/ Produit de deux racines carrées

3-2/ Quotient de deux racines carrées

3-3/ Rendre un dénominateur rationnel ou supprimer le radical au dénominateur

IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

4-2/ Exercice 2

4-3/ Exercice 3

4-4/ Exercice 4

4-5/ Exercice 5

4-6/ Exercice 6

‹

I- La racine carrée d’un nombre réel positif

1-1/ Définition

Soit a un nombre réel positif ou nul (c'est-a-dire $a \geq 0$).

La racine carrée de a est le nombre réel positif dont le carré est égale à a, elle est notée $\sqrt{a}$.

Le symbole $\sqrt{}$ s'appelle : symbole radical.

1-2/ Propriété (Le carré d'une racine carrée)

Soit a un nombre réel tel que a> 0.

$$\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \ \ et \ \ \sqrt{(-a)^2} = a$$

Exemple

‹

1-3/ Remarques importantes

La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas ($\sqrt{-9}$ n'existe pas) .

La racine carrée d'un nombre n'est jamais égale à un nombre négatif $\left(\sqrt{25} \neq -5\right)$.

L'opposé de $\sqrt{a}$ (avec $a \geq 0$) est $-\sqrt{a}$. (L'opposé de $\sqrt{11}$ est $-\sqrt{11}$) .

$\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$

1-4/ Les racines carrées parfaites

‹

II- Résolution de l'équation $x^2 = a$

2-1/ $a > 0$

L'équation $x^2 = a$ est respectivement équivalente à :

$$\begin{gathered} \mathrm{x}^2 - \mathrm{a} = 0 \\ \Rightarrow \mathrm{x}^2 - \sqrt{\mathrm{a}}^2 = 0 \\ \Rightarrow \left(\mathrm{x} - \sqrt{\mathrm{a}}\right)\left(\mathrm{x} + \sqrt{\mathrm{a}}\right) = 0 \\ \Rightarrow \left(\mathrm{x} - \sqrt{\mathrm{a}}\right) = 0 \text{ ou } \left(\mathrm{x} + \sqrt{\mathrm{a}}\right) = 0 \\ \Rightarrow \mathrm{x} = \sqrt{\mathrm{a}} \text{ ou } \mathrm{x} = -\sqrt{\mathrm{a}} \end{gathered}$$

Donc cette équation admet deux solutions: $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

2-2/ $a = 0$

L'équation $x^2 = a$ est respectivement équivalente à :$x^2 = 0$, ce qui signifie que $x = 0$.

Donc cette équation admet pour solution le nombre 0.

2-3/ $a < 0$

L'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.

‹

III- Les opérations sur les racines carrées

3-1/ Produit de deux racines carrées

Propriété

Soient a et b deux nombres réels positifs.

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

Exemple

Extraire un carré parfait

Soient a et b deux nombres réels positifs non nuls.

$$\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$$

Exemple

‹

3-2/ Quotient de deux racines carrées

Propriété

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \geq 0$ et $b > 0$.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Exemple

‹

3-3/ Rendre un dénominateur rationnel ou supprimer le radical au dénominateur

Propriété 1

Soient a et b et k deux nombres réels tels que b> 0.

$$\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b} \; ; \; \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} \; ; \; \frac{a}{k\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{kb}$$

Exemple

Propriété 2 (Expression du conjugué)

Pour supprimer le radical au dénominateur, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Le conjugué de a- b est a+b, et le conjugué de a+b est a- b.

Exemple

‹

IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

Calculer:

$\sqrt{(-3)^2} =$ _____

$\left(-\sqrt{7}\right)^2 =$ _____

$\sqrt{81} =$ _____

$\sqrt{121} =$ _____

$\sqrt{2^2 \times 5^4} =$ _____

$\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 =$ _____

$$\left(2\sqrt{5}\right)^2 = \underline{\qquad} \qquad \sqrt{0,49} = \underline{\qquad} \qquad \sqrt{\frac{49}{36}} = \underline{\qquad}$$
$$\left(\sqrt{19}\right)^2 = \underline{\qquad} \qquad \sqrt{15^2 - 9^2} = \underline{\qquad} \qquad \left(\frac{-\sqrt{7}}{3}\right)^2 = \underline{\qquad}$$

$$\sqrt{\sqrt{169} - \sqrt{144}} = \underline{\qquad\qquad}$$
$$\sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{9 + \sqrt{49}}}} = \underline{\qquad\qquad}$$

‹

4-2/ Exercice 2

Simplifier sous la forme de $a\sqrt{b}$ tel que a et b sont des nombres réels et $b \geq 0$:

$$\mathrm{A} = -3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \underline{\qquad\qquad}$$
$$\mathrm{B} = -2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = \underline{\qquad\qquad}$$
$$\mathrm{C} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 9\sqrt{5} + \sqrt{5} = \underline{\qquad\qquad}$$
$$\mathrm{D} = \left(\sqrt{\sqrt{5} - 2}\right) \times \left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}\right) = \underline{\qquad\qquad}$$
$$\mathrm{E} = \left(\sqrt{2\sqrt{7} - 2\sqrt{3}}\right) \times \left(\sqrt{2\sqrt{7} + 2\sqrt{3}}\right) = \underline{\qquad\qquad}$$

‹

4-3/ Exercice 3

1. Simplifier sous la forme de $a\sqrt{b}$ tel que a et b sont des nombres réels et $b \geq 0$:

$$\mathrm{A} = \sqrt{80} + 3\sqrt{125} - \sqrt{45} = \underline{\qquad\qquad}$$
$$\mathrm{B} = 2\sqrt{18} - 5\sqrt{8} + \sqrt{200} = \underline{\qquad\qquad}$$
$$\mathrm{C} = \sqrt{99} - \sqrt{176} + 2\sqrt{44} = \underline{\qquad\qquad}$$
$$\mathrm{D} = -\sqrt{27} + \sqrt{75} - 4\sqrt{48} = \underline{\qquad\qquad}$$

2. Calculer :

$$\mathrm{E} = \sqrt{150} \times \sqrt{\frac{3}{162}} =$$
$$\mathrm{F} = \sqrt{\frac{3}{10}} \times \sqrt{\frac{270}{8}} =$$
$$\mathrm{G} = \sqrt{\frac{8}{27}} \times \sqrt{\frac{3}{50}} =$$

‹

4-4/ Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

$$\mathrm{x}^2 = 16$$
$$\mathrm{x}^2 = -4$$
$$-5\mathrm{x}^2 = -25$$

$$\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$$
$$\frac{2}{9}x^2 = 2$$
$$5 + 2x^2 = 3$$

‹

4-5/ Exercice 5

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \left(\sqrt{75} - \sqrt{98}\right)\left(5\sqrt{3} + 7\sqrt{2}\right) = \underline{\qquad\qquad}$$
$$B = \left(3 + \sqrt{11}\right)^2 - \left(3 - \sqrt{11}\right)^2 = \underline{\qquad\qquad}$$
$$C = \left(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}\right) = \underline{\qquad\qquad}$$
$$D = \frac{2\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + \sqrt{12}}{\sqrt{75} + \sqrt{48} - 7\sqrt{3}} =$$

2. Écrire les quotients suivants sans radical au dénominateur :

$$\frac{1}{\sqrt{7}} =$$
$$\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} =$$
$$\frac{-10}{3\sqrt{5}} =$$
$$\frac{-4}{1-\sqrt{5}} =$$
$$\frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{5} + 2\sqrt{3}} =$$

‹

4-6/ Exercice 6

On pose :

$$A = 2 + 3\sqrt{5}$$
$$B = 49 + 12\sqrt{5}$$
$$C = 49 - 12\sqrt{5}$$

1. Montrer que $\sqrt{B} = A$
2. Déduire $\sqrt{C}$
3. Calculer $\sqrt{B} \times \sqrt{C}$
4. Calculer $\sqrt{B} + \sqrt{C}$
5. Calculer $\sqrt{B} - \sqrt{C}$

‹