## تمرين 1 — $4pnt$

ليكن $(x_0,q)\in(\mathbb{N}^*)^2$ بحيث $pgcd(x_0,q)=1$، و لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية اساسها $q$ و حدها الأول $x_0$ و تحقق $(\forall n\in\mathbb{N})\ :\ x_{n+1}+2x_{n+3}-44x_0^2q^n=0$

| | |
|---|---|
| ❶ أ) بين أن : $q+2q^3=44x_0$ | $0,25$ |
| ب) بين أن : $pgcd(1+2q^2,4)=1$ | $0,25$ |
| ج) استنتج ان : 4 يقسم $q$ و ان $q$ يقسم 44 ثم حدد $(x_0;q)$. | $0,75$ |
| ❷ نفترض في ما يلي أن $(x_0,q)=(3,4)$ و نضع $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ :\ S_n=\sum_{i=0}^{n-1}x_i$ | |
| أ) تحقق من أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ :\ S_n=4^n-1$ ثم استنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ :\ S_n\equiv 0[3]$. | $0,5$ |
| ب) تحقق من أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ :\ S_{n+1}=4S_n+3$ ثم حدد $pgcd(S_{n+1},S_n)$ | $0,5$ |
| ج) بين أن $n\equiv 0[2]$ اذا و فقط اذا كان $S_n\equiv 0[5]$ | $0,5$ |
| ❸ بين أن $4^{28}\equiv 1[29]$ | $0,25$ |
| ❹ أ) حدد أصغر عدد طبيعي غير منعدم $n$ يحقق $4^n\equiv 1[17]$ | $0,25$ |
| ب) استنتج أن $(\forall k\in\mathbb{N})\ :\ 4^{4k}\equiv 1[17]$ | $0,25$ |
| ❺ حدد أربعة قواسم أولية للعدد $S_{28}$. | $0,5$ |

## تمرين 2 — $4pnt$

ليكن m عدد عقديا يخالف 1.

### الجزء 1 (2ن)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(\mathrm{E_m})$ ذات المجهول z :

$$(\mathrm{E_m}):\quad \mathrm{z}^2-(1-\mathrm{i})(\mathrm{m}+1)\mathrm{z}-\mathrm{i}\left(\mathrm{m}^2+1\right)=0$$

| | |
|---|---|
| ❶ أ) تحقق من أن $\Delta=[(1+i)(m-1)]^2$ هو مميز المعادلة $(\mathrm{E}_m)$ | $0,5$ |
| ب) حل المعادلة $(\mathrm{E_m})$ في $\mathbb{C}$. | $0,5$ |
| ج) حدد على الشكل الجبري قيمتي العدد العقدي m لكي يكون جداء حلي المعادلة $(\mathrm{E_m})$ يساوي 1. | $0,5$ |
| ❷ نضع $\mathrm{z_1}=1-\mathrm{im}$ و $\mathrm{z_2}=\mathrm{m}-\mathrm{i}$. | |
| في حالة $\mathrm{m}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ و $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$، أكتب $\mathrm{z_1}$ و $\mathrm{z_2}$ على الشكل المثلثي. | $0,5$ |

### الجزء 2 (2ن)

المستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(\mathrm{O},\vec{\mathrm{u}},\vec{\mathrm{v}})$

نعتبر النقط M و $\mathrm{M_1}$ و $\mathrm{M_2}$ التي ألحاقها على التوالي $\mathrm{m},\mathrm{z_1}=1-\mathrm{im}$ و $\mathrm{z_2}=\mathrm{m}-\mathrm{i}$.

| | |
|---|---|
| ❶ حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط M و $\mathrm{M_1}$ و $\mathrm{M_2}$ مستقيمية. | $0,5$ |
| ❷ أ) بين أن التحويل R الذي يربط النقطة $\mathrm{M(z)}$ بالنقطة $\mathrm{M'}(\mathrm{z'})$ بحيث $\mathrm{z'}=1-\mathrm{iz}$ : هو دوران ينبغي تحديد مركزه $\Omega$ و زاويته. | $0,5$ |
| ب) أثبت أن العدد العقدي $\frac{\mathrm{z_2}-\mathrm{z_1}}{\mathrm{z_2}-\mathrm{m}}$ تخيلي صرف اذا و فقط اذا كان $\mathrm{Re(m)}+\mathrm{Im(m)}=1$. | $0,5$ |
| ج) استنتج مجموعة النقط M بحيث تكون النقط $\Omega$ و M و $\mathrm{M_1}$ و $\mathrm{M_2}$ متداورة. | $0,5$ |

| | |
|---|---|
| $5,75pnt$ | **تمرين 3**<br>لتكن $f$ الدالة المعرفة على $D=]-1,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x^2\ln(1+x)$.<br>و ليكن $(C_f)$ منحنى الدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ بالوحدة $2cm$ و نأخذ $\ln 2\simeq 0,7$ و $\ln 3\simeq 1,1$ . |
| $1$ | ❶ احسب $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ وأول النتائج مبيانيا. |
| | ❷ لكل $x$ من $D$ نضع $u(x)=2\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}$. |
| $0,25$ | أ- ادرس تغيرات الدالة $u$ على $D$. |
| $0,5$ | ب- احسب $u(0)$ واستنتج إشارة $u(x)$ على $D$. |
| $1$ | ❸ بين أن $f$ قابلة للاشتقاق على $D$ واحسب $f'(x)$ لكل $x$ من $D$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة $f$. |
| $1$ | ❹ حدد معادلة المماس للمنحنى $(C_f)$ عند أصل المعلم ثم ارسم $(C_f)$ مبرزا النقط التي أفاصيلها $-0,5$ و $0$ و $1$ و $2$. |
| $0,75$ | ❺ احسب ب $cm^2$ مساحة الحيز المحصور بين جزء من $(C_f)$ على $[0,1]$ و محور الأفاصيل. |
| $0,5$ | ❻ أ- ليكن $n$ من $\mathbb{N}$ . بين أن المعادلة $f(x)=\sqrt{n}$ تقبل حلا بالضبط $u_n$ في $D$. |
| $0,25$ | ب- ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. |
| $0,5$ | ج- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ غير مكبورة وحدد نهايتها. |
| $6,25pnt$ | **تمرين 4**<br>نعتبر الدالتين العدديتين $f$ و $F$ المعرفتين على $\mathbb{R}^+$ بـ : $f(x)=\sqrt{e^{2x}-1}$ و $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$. |
| | **الجزء 1** |
| $0,5$ | ❶ بين أن $F$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ واحسب $F'(x)$ لكل $x>0$. |
| | ❷ لكل $x>0$ نضع $G(x)=f(x)-\arctan(f(x))$. |
| $0,75$ | أ) بين أن $G$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ وأن $(\forall x\in]0,+\infty[)\ :\ G'(x)=f(x)$. |
| $0,75$ | ب) استنتج أن $(\forall x\in]0,+\infty[)\ :\ G(x)=F(x)$ |
| $0,5$ | ج) استنتج أن $\displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{2})}\sqrt{e^{2x}-1}dx=1-\frac{\pi}{4}$ |
| | **الجزء 2** |
| | لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n=\displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{2})}(f(t))^n dt$. |
| $0,5$ | ❶ أ) لكل $x\geq 0$ نضع $g(x)=e^{2x}-1$ بين أن $(\forall x\in[0,+\infty[)\ :\ g'(x)=2(1+g(x))$ |
| $0,75$ | ب) استنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ :\ I_{n+2}+I_n=\dfrac{1}{n+2}$ ( لاحظ أن $I_n=\displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{2})}(g(t))^{\frac{n}{2}}dt$ ) |
| $0,75$ | ج) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ :\ 0\leq I_n\leq\dfrac{1}{n+2}$ واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. |
| | ❷ لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$ نضع $u_n=I_{n+4}-I_n$. |
| $0,5$ | أ) باستعمال السؤال ❶ب) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ :\ u_n=\dfrac{1}{n+4}-\dfrac{1}{n+2}$ |
| $0,5$ | ب) احسب المجموع $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}u_{4k+1}$ بدلالة $I_{4n+5}$ و $I_1$. |
| $0,75$ | ج) استنتج مما سبق أن $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=2n+1}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$ |

## تمرين 5

*Bonus*

ليكن $a$ و $b$ و $c$ و $x$ من $\mathbb{N}$ مع $x \geq 2$، الكتابة $\overline{abc}^{(x)}$ هي كتابة العدد $\overline{abc}$ في نظمة العد للاساس $x$.

❶ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E) \;:\; (x+1)^2 = 9 + 5y$.

أ) ليكن $(x, y)$ حلا للمعادلة $(E)$. بين أن : $x \equiv 1[2]$ او $x \equiv 2[5]$.

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E)$.

❷ بين أن $(\forall k \in \mathbb{Z}) \;:\; (5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k+1) = (k-1) \wedge 8$

❸ حل في $\mathbb{N}^2$ النطمة

$$(S) \begin{cases} \overline{121}^{(x)} = \overline{59}^{(y)} \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$$