تمرين 1 — $4pnt$

الجزء 1

ليكن s عددا صحيح طبيعي.

❶ بين أن s^2 عدد فردي إذا و فقط اذا كان s عدد فردي. — $0,25$

❷ أثبت أنه اذا كان s عدد فردي فإن $s^2 \equiv 1[8]$. — $0,25$

الجزء 2

نقترح في هذا الجزء تحديد المجموعة $E=\{(m,n,s)\in \mathbb{N}^{*3}/2^{2m}+3^{2n}=s^2\}$

❶ تحقق من أن المثلوث $(2,1,5)$ ينتمي الى E. — $0,25$

الى نهاية التمرين **نفترض أن المثلوث** (m,n,s) **ينتمي الى** E.

❷ أ) بين أن s عدد فردي. — $0,25$

ب) بين أن $s^2-3^{2n}\equiv 0[8]$. — $0,25$

ج) بين أن $m\neq 1$. — $0,25$

❸ نفترض أن $m\geq 2$.

أ) بين أن العددين $s-3^n$ و $s+3^n$ زوجيين. — $0,25$

ب) نضع $d=pgcd(s-3^n,s+3^n)$.

بين أن d يقسم $2s$ و d يقسم 2^{2m} ثم استنتج أن $d=2$. — $0,5$

ج) بين أن $s-3^n=2$ و أن $s+3^n=2^{2m-1}$. استنتج أن $s=2^{2m-2}+1$ و أن $3^n=2^{2m-2}-1$. — $0,5$

❹ حدد n و s في حالة $m=2$. — $0,25$

❺ نفترض أن $m\geq 3$.

أ) بين أن $3^n\equiv -1[16]$. — $0,25$

ب) حدد حسب قيم العدد الصحيح الطبيعي k باقي قسمة العدد 3^k على 16. — $0,25$

ج) استنتج أنه لا يوجد مثلوث (m,n,s) ينتمي الى E في حالة $m\geq 3$. — $0,25$

❻ حدد المجموعة E. — $0,25$

تمرين 2 — $4pnt$

الجزئين مستقلين.

الجزء 1

ليكن m من $\mathbb{C}^*$ نعتبر المعادلة $(F_m): z^2-(3m-2i)z+2m^2-4mi=0$.

❶ تحقق من أن $\Delta=(m+2i)^2$ هو مميز المعادلة ثم استنتج حلي المعادلة z' و z'' — $0,5$

❷ في هذا السؤال نفترض أن $m=1+i$ و نرمز لحلي المعادلة (F_m) ب z_1 و z_2 بحيث $|z_1|<|z_2|$.

أ) اعط الشكل المثلثي للعددين z_1 و z_2. — $0,25$

ب) تحقق من أن $(-z_1)$ من بين الجذور المكعبة ل z_2. — $0,25$

ج) استنتج الشكل الجبري للجذور المكعبة ل z_2. — $0,5$

❸ $(\mathcal{P})$ منسوب الى م.م.م $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. نعتبر النقط $A(i)$ و $B(2m)$ و $C(m-2i)$

أ) بين أن النقط A و B و C مستقيمية اذا و فقط اذا كان $m\in i\mathbb{R}$. — $0,5$

ب) نفترض أن $m\notin i\mathbb{R}$. خارج المثبث ABC ننشئ مثلثا قائما للزاوية و متساوي الساقين BCD في D.

بين أن $z_D=\dfrac{(3+i)m-2(1+i)}{2}$ او $z_D=\dfrac{(3-i)m-2(1-i)}{2}$ (يمكنك استعمال الكتابة العقدية للدوران). — $0,5$

الجزء 2

نعتبر المعادلة : $z\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}^*$ $z^n=(iz+2i)^n$ (E_n)

❶ أ) حدد الشكل المثلثي للعددين z_1 و z_2 حلي المعادلة (E_2) مع $(Im(z_1)>0)$. — $0,5$

ب) نضع : $u_p=z_1^p+z_2^p$ لكل p من $\mathbb{N}$

بين أن $u_p=(-1)^p2\sqrt{2}^p\cos(\dfrac{p\pi}{4})$ — $0,5$

❷ $(\mathcal{P})$ منسوب الى م.م.م $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. نعتبر النقط $A(-2)$ و $M(z)$ حيث $z\in\mathbb{C}$.

أ) بين أنه اذا كان z حلا للمعادلة (E_n) فإن $OM=AM$. — $0,5$

تمرين 3 — $6pnt$

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي:

$$f(x)=2x+\ln x+\arctan(\sqrt{x})$$

الجزء 1

❶ بين أن f دالة متصلة على $]0,+\infty[$. — $0,25$

❷ احسب نهايات f عند محدات D_f ثم أعط الفروع الانهائية. — $0,5$

❸ أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$. — $0,25$

ب) احسب f' ثم اعط جدول التغيرات. — $0,5$

ج) بين أن $(\forall x\in]0,+\infty[), f'(x)>2$. — $0,25$

❹ بين أن f تقابل من $]0,+\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده. — $0,25$

❺ أ) بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$. — $0,5$

ب) بين أن $(\forall x\in[\alpha,+\infty[),\ f(x)\geq x$. — $0,25$

❻ أنشئ C_f و $C_{f^{-1}}$ في نفس المعلم. — $0,75$

الجزء 2

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1}=f(u_n)\\ u_0\in]\alpha,+\infty[\end{cases}$$

❶ بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}),\ u_n>\alpha$. — $0,5$

❷ بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية. — $0,5$

❸ بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$. — $0,5$

الجزء 3

نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} v_{n+1} = f^{-1}(v_n) \\ v_0 \in]\alpha, +\infty[\end{cases}$$

❶ بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}),\ |v_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|v_n - \alpha|$. — $0,25$

❷ استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها. — $0,75$

تمرين 4 — $6pnt$

ليكن n عدد من $\mathbb{N}^*$. نعتبر الدالة P_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي:
$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^k x^k}{k}$$

الجزء 1

❶ بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in [0, +\infty[),\ P_n'(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$ — $0,5$

❷ ادرس تغيرات الدالة P و ضع جدول تغيراتها. — $0,5$

❸ بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ P_n(1) < 0$. — $0,5$

❹ أ) تحقق من أن

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in [0, +\infty[),\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right)$. — $0,75$

ب) استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ P_n(2) \geq 0$. — $0,5$

❺ بين أن المعادلة $P_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_n في المجال $]1, +\infty[$ و أن $1 < x_n \leq 2$. — $0,5$

الجزء 1

❶ بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in [0, +\infty[),\ P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt$ — $0,75$

❷ استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ \int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt$. — $0,5$

❸ بين أن $(\forall t \in [1, +\infty[),\ t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$. — $0,5$

❹ أ) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ \int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq \frac{n}{2}(x_n - 1)^2$. — $0,5$

ب) استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ 0 < x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2\ln 2}{n}}$. ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. — $0,5$

تمرين 5 (*Bonus*)

Pour $n \geq 1$ un entier, on définit l'*indicateur d'Euler* de n par :
$$\varphi(n) = \text{card}\{1 \leq k \leq n;\ k \text{ est premier avec } n\}.$$

❶ Calculer $\varphi(p)$ lorsque p est un nombre premier.

❷ Calculer $\varphi(p^\alpha)$, où p est premier et $\alpha \geq 1$.

❸ Que signifie $\varphi(n)$ pour l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

❹ En déduire que si $n \wedge m = 1$, alors $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

❺ Déduire des questions précédentes une formule pour calculer $\varphi(n)$ pour tout entier n.

❻a) Soit d un diviseur de n. On pose $A_d = \{1 \leq k \leq n;\ k \wedge n = d\}$. Quel est le cardinal de A_d ?

b) En déduire que $n = \sum_{d/n} \varphi(d)$