

تمرين 1

11pnt

ليكن n عدد صحيح طبيعي. نعتبر الدالة f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0, +\infty[$ بما

$$\begin{cases} f_n(x) = x(1 - \ln x)^n & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases} \quad \text{يلي:}$$

ليكن (C_n) منحنى الدالة f_n في معلم متعامد ممنظم.

الجزء 1 (4ن)

① (أ) بين أن الدالة f_n متصلة على يمين 0 (يمكنك وضع $x = t^n$). 0,5

(ب) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على يمين 0. 0,5

(ج) احسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$ 1

② (أ) ادرس تغيرات الدالة f_1 . 0,5

(ب) ادرس تغيرات الدالة f_2 . 0,5

③ (أ) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) . 0,5

(ب) انشئ المنحنيين (C_1) و (C_2) (نقبل أن النقطة $A(1,1)$ نقطة انعطاف للدالة (C_2)) (نأخذ

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm.$$

الجزء 2 (25, 2ن)

نعتبر الدالة العددية للمتغير x المعرفة على المجال $]-\infty, 0]$ بما يلي : $F(x) = \int_{e^x}^1 \frac{f_1(t)}{1+t^2} dt$

① (أ) أثبت أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $]-\infty, 0]$ و أن :

$$(\forall x \in]-\infty, 0]) F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}} \quad 0,5$$

(ب) اسنتج تغيرات الدالة F على المجال $]-\infty, 0]$. 0,5

② (أ) بين أن لكل $x \in]-\infty, 0]$ لدينا

$$\frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \quad 0,5$$

(ب) تحقق من أن الدالة $x \mapsto x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right)$ دالة أصلية ل f_1 على المجال $]0, +\infty[$ 0,25

(ج) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \frac{3}{4}$ 0,25

③ نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية l عندما يؤول x الى $-\infty$. بين أن : $\frac{3}{8} \leq l \leq \frac{3}{4}$ 0,25

الجزء 3 (4, 75ن)

لكل عدد صحيح طبيعي n غير منعدم ، نضع $u_n = \int_1^e f_n(x) dx$

① (أ) بين أن : $(\forall n \geq 1) u_n \geq 0$ 0,5

(ب) حدد اشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[1, e]$. 0,5

(ج) بين أن $u_{n+1} \leq u_n : (\forall n \geq 1)$ 0,25

(د) استنتج ان المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة. 0,25

② بين أن $(\forall n \geq 1) u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{(n+1)}{2}u_n$: 0,5

ب) استنتج مساحة الحيز المحصور بين C_1 و C_2 والمستقيمين $x = e$ و $x = 1$: 0,5

③ بين أن $(\forall n \geq 2) \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$: (يمكنك استعمال الاسئلة 1أ) و 1ج) و 2أ)) : 0,75

ب) حدد نهاية المتالتين $(u_n)_{n \geq 1}$ و $(nu_n)_{n \geq 1}$: 0,5

④ ليكن a عدد حقيقي مخالف ل u_1 . نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي $v_1 = a$: 0,5

و لكل $(n \geq 1) v_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}v_n$ و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n , نضع

$$d_n = |v_n - u_n|$$

أ) بين أن $(\forall n \geq 1) d_n = \frac{n!}{2^{n-1}}d_1$: 0,25

ب) بين أن $(\forall n \geq 2) \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$: 0,25

ج) بين أن $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = +\infty$: 0,25

د) استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ متباعدة. : 0,25

تمرين 2

5pt

ليكن m عدد عقديا يخالف 1.

الجزء 1 (2,5)

نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة (E_m) ذات المجهول z : 0,5

$$(E_m) : z^2 - (1-i)(m+1)z - i(m^2+1) = 0$$

① تحقق من أن $\Delta = [(1+i)(m-1)]^2$ هو مميز المعادلة (E_m) : 0,5

ب) حل المعادلة (E_m) في \mathbb{C} . : 0,5

ج) حدد على الشكل الجبري قيمتي العدد العقدي m لكي يكون جداء حلي المعادلة (E_m) يساوي 1. : 0,5

② نضع $z_2 = m - i$ و $z_1 = 1 - im$: 1

في حالة $m = e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

الجزء 2 (2)

المستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v})

نعتبر النقط M, M_1 و M_2 التي ألقاها على التوالي $z_2 = m - i$ و $z_1 = 1 - im$.

① حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط M, M_1 و M_2 مستقيمية. : 0,5

② بين أن التحويل R الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث $z' = 1 - iz$ هو : 0,5

دوران ينبغي تحديد مركزه Ω و زاويته.

ب) أثبت أن العدد العقدي $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ تخيلي صرف اذا و فقط اذا كان $\text{Re}(m) + \text{Im}(m) = 1$. : 0,5

ج) استنتج مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة. : 0,5

الجزء 3 (0,5)

حدد طبيعة التحويل f و كذا عناصره الأساسية بحيث $f(z) = (1+i)z + 1 + i$ لكل z من \mathbb{C} . : 0,5

الجزء 1 (5, 1ن)

نعتبر في (E) المعادلة التالية : $113x - 68y = 22$: (E)

- ① بين أن المعادلة (E) تقبل مالانهاية من الحلول. 0,5
 ① اوجد حلا خاصا (x_0, y_0) لـ (E) مبزا كيف حصلت عليه. 0,5
 ① اوجد جميع حلول المعادلة (E) موضحا جميع المراحل. 0,5

الجزء 2 (25, 4ن)

لكل n من \mathbb{N} نضع $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.

① أ) تحقق من أن a_n عدد زوجي لكل n من \mathbb{N} . 0,5

ب) حدد قيم n التي يكون من أجلها $a_n \equiv 0[3]$ 0,5

② ليكن p عددا اوليا بحيث $p > 3$.

أ) بين أن : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و $3^{p-1} \equiv 1[p]$ و $6^{p-1} \equiv 1[p]$ 0,5

ب) بين أن p يقسم a_{p-2} . 0,5

ج) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي أولي q ، يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم n بحيث 0,5

$$a_n \wedge q = q$$



Scanner le code QR pour avoir la solution après 18 :30.