المستوى: الثانية ع- رياضية
المدة: 4 ساعات
السنة الدراسية: 2014-2015

الامتحان التجريبي الأول
مادة الرياضيات
دورة فبراير 2015

Inisse
Groupe scolaire

التمرين الأول — كر 3 ن

المستوى P منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$. نعتبر التطبيق φ الذي يربط كل نقطة M من P لحقها z بالنقطة M' ذات اللحق z' بحيث : $z'=-i\bar{z}+2i$

فيما يلي نعتبر النقط: A و B و C التي ألحاقها على التوالي $z_A=2i$ و $z_B=2$ و $z_C=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ والنقط M و N و M' و M'' التي ألحاقها على التوالي z و $\bar{z}$ و z' و $\overline{z'}$ بحيث M' هي صورة M بالتطبيق φ و $z\in\mathbb{C}^*-\{-2\}$.

1- حدد النقطة C' صورة C بالتطبيق φ . 0,50

2- أ) بين أن المستقيمين (ON) و (AM') متعامدان . 0,50

ب) لتكن $(\mathscr{C})$ الدائرة التي مركزها O وشعاعها 2

حدد $\mathscr{C}'=\varphi(\mathscr{C})$ 0,50

ج) تحقق أن $C\in(\mathscr{C})$ واكتب z_C على الشكل المثلثي ثم أنشئ $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ و C و C' . 0,50

3- لتكن M نقطة من $(\mathscr{C})$ تخالف B . بين أن : $\exists\theta\in]0;2\pi[\quad z=2e^{i\theta}$ ثم حدد معيار وعمدة z' بدلالة θ. 0,50

4- أ) بين أن M'' هي صورة M بالدوران r الذي مركزه $\Omega(1-i)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ 0,50

ب) ليكن n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ ونعتبر النقطة M_n ذات اللحق z^n . حدد z إذا علمت أن $r(M_n)=B$. 0,50

التمرين الثاني — كر 3 ن

1) بين أن 163 عدد أولي 0,25

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E):\ 13x-162y=1$

حل المعادلة (E) 0,50

3) نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظمة : $(S):\begin{cases}x\equiv a\ [13]\\ x\equiv b\ [162]\end{cases}$ حيث a و b عددان من $\mathbb{Z}$

أ- تحقق من أن العدد $x_0=325b-324a$ هو حل للنظمة (S) 0,25

ب- بين أن: $(S)\Longleftrightarrow x\equiv x_0\ [2106]$ 0,50

ج- حل في $\mathbb{Z}$ النظمة (S) في الحالة $a=2$ و $b=3$ 0,50

4) ليكن x عددا من $\mathbb{Z}$ بحيث : $x^{25}\equiv 3\ [163]$

أ- بين أن: $x\wedge 163=1$ ثم أن: $x\equiv 3^{13}\ [163]$ 0,75

ب- استنتج أن: $x^{25}\equiv 3\ [163]\Longleftrightarrow x\equiv 3^{13}\ [163]$ 0,75

المستوى: الثانية ع- رياضية المدة: 4 ساعات السنة الدراسية: 2014-2015	الامتحان التجريبي الأول مادة الرياضيات دورة فبراير 2015	Anisse Groupe scolaire

التمرين الثالث (3 ن)

تذكير: $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية

1) نزود المجموعة $G=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي:

$$(\forall(a;b)\in G)(\forall(c;d)\in G)\quad (a;b)T(c;d)=(ac;ad+bc)$$

أ- بين أن القانون T تبادلي وتجميعي — 0,50

ب- حدد العنصر المحايد للقانون T — 0,25

ج- بين أن (G,T) زمرة تبادلية — 0,25

د- ليكن n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$، بين أن: $\underbrace{(-1;1)T\ \dots\ T(-1;1)}_{n \text{ مرة}}=\left((-1)^n;n(-1)^{n+1}\right)$ — 0,50

2) لكل $(a;b)$ من $\mathbb{R}^2$، نضع: $M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & b & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$ ونعتبر المجموعة $E=\{M_{(a;b)}\ /\ (a;b)\in G\}$

أ- بين أن E جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}),\times)$ — 0,25

ب- بين أن التطبيق: $f:G\longrightarrow E$، $(a;b)\longmapsto M_{(a;b)}$ تشاكل تقابلي من (G,T) نحو $(E,\times)$ — 0,50

ج- استنتج بنية $(E;\times)$ ثم حدد مقلوب كل مصفوفة $M_{(a;b)}$ من E — 0,25

د- نضع: $A=M_{(-1;1)}$، احسب A^n لكل n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ — 0,50

التمرين الرابع (3 نقط)

الجزء I

ليكن a عدد صحيح طبيعي غير منعدم بحيث: $a\wedge 10=1$

1) أ- بين أنّ a عدد فردي و استنتج أنّ: $a^8\equiv 1\ [2]$. — 0,25 ن

ب- بين أن a غير قابل للقسمة على 5 و أن $a^4\equiv 1\ [5]$. — 0,25 ن

ج- استنتج أن $a^8\equiv 1\ [10]$. — 0,25 ن

2) أ- بين أن $\forall k\in\mathbb{N}$ — 0,75

$a^{8\times10^k}\equiv 1\ [10^{k+1}]$ و استنتج أن: $a^{800000001}\equiv a\ [10^9]$.

ب- باستعمال نتيجة السؤال السابق، أثبت وجود عدد صحيح طبيعي x بحيث الكتابة العشرية للعدد x^3 تنتهي بالعدد 123456789 — 0,5 ن

الجزء الثاني

1ن - نضع $E = \{0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots,30\}$ ونعتبر التطبيق f من E نحو E والذي يربط كل عنصر n من E بباقي القسمة ل $27n + 4$ على 31

بين أن f تقابل من E نحو E وحدد f^{-1} .

مسـألة: (7 ن)

لكل n من $\mathbb{N} - \{0,1\}$ نضع: $I = \left]-\frac{1}{n}, +\infty\right[$.

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{\ln(1+nx)}{x} & ; \quad x \in I - \{0\} \\ f_n(0) = n \end{cases}$$

1) أ- إحسب $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ و أول النتيجة هندسيا. 0,50 ن

ب- بين أن الدالة f_n متصلة على اليمين في 0. 0,50 ن

2) نعتبر الدالة φ_t للمتغير الحقيقي x المعرفة على I بمايلي:

$$t \in I \quad ; \quad \varphi_t(x) = x^2\left(\ln(1+nt) - nt\right) - \left(\ln(1+nx) - nx\right)t^2$$

أ- باستعمال φ_t بين انه يوجد عدد c من $]0,t[$ بحيث: $(t>0)$ 0,50 ن

$$\frac{\ln(1+nt) - nt}{t^2} = \frac{-n^2}{2(1+nc)}$$

ب- استنتج أن f_n قابلة للاشتقاق في 0 وان $f_n'(0) = -\frac{n^2}{2}$ 0,50 ن

3) نعتبر الدالة g_n للمتغير الحقيقي x المعرف على I بمايلي:

$$g_n(x) = nx - (1+nx)\ln(1+nx)$$

أ- بين أن: $\left(\forall x \in I - \{0\}\right) \quad g_n(x) < 0$ 0,50 ن

ب- بين أن f_n قابلة للاشتقاق على $I - \{0\}$ وان:

$$\forall x \in I - \{0\} \quad f'_n(x) = \frac{g_n(x)}{x^2(1+nx)}$$ 0,50 ن

ج- أعط جدول تغييرات الدالة f_n . 0,50 ن

4) ادرس الوضع النسبي لمنحنيي الدالتين f_n و f_{n+1} على المجال $[0,+\infty[$. 0,5 ن

5) أ- بين أن المعادلة $f_n(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α_n في $[0,+\infty[$. 0,5 ن

ب- بين أن $1.01 < \alpha_2 < 1.09$ وحدد باستعمال طريقة التفرع الثنائي تاطيرا للعدد α_2 سعته 0,02 . 0,5 ن

ج- بين أن المتتالية (α_n) تزايدية. 0,5 ن

د- احسب $\lim_{x\to+\infty} \alpha_n$. 0,5 ن

6)- أنشئ في معلم متعامد ممنظم منحنى الدالتين f_2 و f_3 . 0,5 ن + 0,5